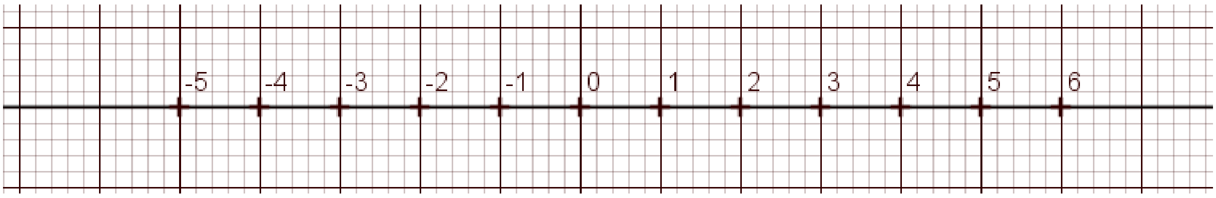
Notion de valeur absolue

I- **Introduction**

Exemple 1

On rappelle que sur un axe (droite graduée) tout point est repéré par un réel appelé abscisse de ce point.

Placer sur la droite ci-dessous les points $A(-2), B(1), C(3), D(3{,}14), E(\sqrt{2})$



Calculer la valeur exacte des distances suivantes :

$$AB =$$
$$AC =$$
$$AD =$$
$$AE =$$
$$DE =$$
$$CD =$$

Soit un point quelconque de l'axe ci-dessus d'abscisse x

Exprimer en fonction de x les distances suivantes en respectant les conditions données :

On sait que l'abscisse x de point M vérifie $x < -3$ alors :

$AM =$ $\qquad\qquad$ $CM =$ $\qquad\qquad$ $EM =$

On sait que l'abscisse x de N vérifie $0 < x < 1$ alors :

$AN =$ $\qquad\qquad$ $CN =$ $\qquad\qquad$ $EN =$

On sait que l'abscisse x de P vérifie $x > 4$, alors :

$AP =$ $\qquad\qquad$ $CP =$ $\qquad\qquad$ $EP =$

Généralisation : soient G et H d'abscisses 2,5 et y

Exprimer la distance GH selon les valeurs de y :

Exemple 2 :

Sur un axe, on considère les points suivants :$M(x), N(y), P(\sqrt{3}), Q(\pi), R(3{,}14), S(-1)$

1°) Donner la valeur exacte des longueurs suivantes :

$PQ =$ $\qquad\qquad$ $RS =$ $\qquad\qquad$ $NR =$ $\qquad\qquad$ $MN =$

$PS =$ $\qquad\qquad$ $QR =$

2°) Rappel : on note $d(x; y)$ la distance entre les réels x et y.

Exprimer la valeur exacte de :

$d(2; 7) =$ $\qquad\qquad$ $d(3; \pi) =$ $\qquad\qquad$ $d(x; y) =$

Notion de valeur absolue

II- Définition

Soit deux réels *a* et *b*, on définit la distance entre *a* et *b* par :

$$|a-b| = a-b \ \ si\ a \geq b$$
$$= b-a \ \ si\ b \geq a$$

Exercice 1

Exprimer sans barres de valeur absolue :

$\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| =$ $\qquad$ $|\pi-2| =$ $\qquad$ $|\pi-4| =$

Exercice 2

Traduire à l'aide d'une phrase, les notations suivantes :

$|x-2|$

$|3-x|$

$|x+1|$

$|4+x|$

Exercice 3

Donner l'écriture avec des barres de valeur absolue :

$d(-1;x) =$ $\qquad$ $d(y;6) =$

$d(a;b) =$ $\qquad$ $d(x;-1) =$

Exercice 3

On considère dans le plan muni du repère (O, I, J) les points $A(-2;3), B(-2;y), C(x;3)$

Calculer la valeur exacte des distances suivantes en fonction de x ou de y :

$AB =$

$AC =$

III- Valeur absolue et intervalle.

Notion de valeur absolue

Introduction

Représenter sur un axe l'ensemble des points suivants :

1- $d(x\,;2) = 1$

2- $d(-1\,;x) = 3$

3- $d(x\,;4) \leq 2$

4- $d(x\,;-1) \leq 3$

5- $d(x\,;-2) < 3$

Représenter sur un axe l'ensemble des points d'abscisse *x* telle que :

$$|x-1| < 2$$

$$|3-x| \leq 4$$

$$|x+5| < 2$$

Puis déterminer l'ensemble auquel *x* appartient dans chaque cas.

Notion de valeur absolue

A retenir :

Soient *a* et *b* deux réels quelconques et *r* un réel positif

- $|x-a| = r \Leftrightarrow x \epsilon \{a-r ; a+r\}$
- $|x-a| \leq r \Leftrightarrow x \epsilon [a-r ; a+r]$

Réciproquement :

- $x \in \{a ; b\} \Leftrightarrow |x-c| = r$ où $c = \frac{a+b}{2}$ et $r = \left|\frac{b-a}{2}\right|$
- $x \in [a ; b] \Leftrightarrow |x-c| \leq r$ où $c = \frac{a+b}{2}$ et $r = \left|\frac{b-a}{2}\right|$

Exercice 1

Traduire à l'aide de valeur absolue les phrases mathématiques suivantes :

$$x \in \{1 ; 4\}$$

$$y \in [-2 ; 2]$$

$$t \in [-1 ; 4]$$

Exercice 2

Application à un encadrement décimal d'un réel x à 10^{-n} près où n est un entier naturel.
Définition : un encadrement de x à 10^{-n} près est un encadrement $a < x < b$ avec $|b-a| = 10^{-n}$
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + x + 2$

1- Représenter la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice. Conjecturer le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ et en donner un encadrement à l'unité près.
2- A l'aide de la table des valeurs donnée par la calculatrice, déterminer un encadrement au dixième près de la solution.
3- Déterminer un encadrement de la solution dix-millième près.