Bienvenue en classe préparatoire économique et commerciale dans la voie technologique !
Les calculatrices étant interdites au concours en mathématiques en prépa ECT, il faut s'entraîner à s'en passer. Vous pouvez commencer cet entraînement en révisant vos tables de multiplications et en révisant des règles de calculs étudiées au collège et au lycée. Une partie de ces règles sont rappelées ci-dessous avec des exercices d'application. Elles seront revues en classe à la rentrée.

Bon courage !

Fractions

Soient a, b, c et d quatre nombres réels avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

- Si $c \neq 0$, $\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}$
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
- Si $c \neq 0$, $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$

Exercice 1

Exprimer les fractions ci-dessous sous forme de fractions irréductibles :

Exemples corrigés : Exprimons $A = \dfrac{3}{12} - \dfrac{5}{18}$, $B = \dfrac{105}{27} \times \dfrac{90}{56}$ et $C = \dfrac{\frac{10}{30}}{\frac{8}{28}}$ sous forme de fractions irréductibles.

- A est une somme ou une différence de fractions sous forme irréductible : $\boxed{\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}}$.

On cherche donc à écrire ces fractions avec un dénominateur commun.
Pour écrire ces fractions avec un dénominateur commun on cherche un nombre qui est à la fois un multiple de 12 et un multiple de 18 (On peut éventuellement s'aider des décompositions en produits de facteurs premiers).
On a ici : $12 = 2 \times 2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3 \times 3$ donc un dénominateur commun possible est $2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$. Si on ne trouve pas de dénominateur commun astucieux, on prend pour dénominateur commun le produit des deux dénominateurs. Ici, si on n'avait pas vu l'astuce précédente, on prendrait pour dénominateur commun : $12 \times 18 = 216$.
Les fractions ayant un dénominateur commun, on additionne les deux numérateurs obtenus :

$$A = \frac{3}{12} - \frac{5}{18} = \frac{3 \times 3}{12 \times 3} - \frac{5 \times 2}{18 \times 2} = \frac{9 - 10}{36} = \boxed{-\frac{1}{36}}.$$

- B est un produit de fractions. On simplifie ce produit de fractions : $\boxed{\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}}$.

Puis on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux : $\boxed{\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}}$ ou $\boxed{a \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{d}}$

$$B = \frac{105}{27} \times \frac{90}{56} = \frac{3 \times 5 \times 7}{3 \times 9} \times \frac{9 \times 2 \times 5}{2 \times 4 \times 7} = \boxed{\frac{25}{4}}.$$

- C est un quotient de fractions.

On multiplie la fraction du numérateur par l'inverse de la fraction du dénominateur : $\boxed{\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}}$

$$C = \frac{\frac{10}{30}}{\frac{8}{28}} = \frac{10}{30} \times \frac{28}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{2} = \boxed{\frac{7}{6}}.$$

$\text{D} = -\dfrac{13}{8} + \dfrac{7}{16}$ $\quad \text{F} = \dfrac{11}{26} - \dfrac{5}{39}$ $\quad \text{H} = -\dfrac{5}{4} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{-7}{5}$ $\quad \text{J} = \dfrac{63}{30} \times \dfrac{45}{28}$ $\quad \text{L} = \dfrac{\frac{51}{21}}{\frac{68}{7}}$

$\text{E} = \dfrac{7}{35} + \dfrac{8}{15}$ $\quad \text{G} = \dfrac{7}{11} + \dfrac{4}{25}$ $\quad \text{I} = \dfrac{44}{105} \times \dfrac{42}{66}$ $\quad \text{K} = \dfrac{-\frac{5}{2}}{\frac{4}{15}}$ $\quad \text{M} = \dfrac{\frac{72}{35}}{\frac{54}{105}}$

Exercice 2

Soit x un réel. Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un seul quotient.

Exemple corrigé : Simplifions $A = \dfrac{3}{x+5} - \dfrac{1}{4-x}$.

A est une somme de deux quotients. Les dénominateurs sont ici variables (ils dépendent d'un réel x). On peut prendre pour dénominateur commun le produit des deux dénominateurs :

$$A = \frac{3}{x-5} - \frac{1}{4-x} = \frac{3 \times (4-x) - 1 \times (x-5)}{(x-5) \times (4-x)} = \frac{12 - 3x - x + 5}{(x-5)(4-x)} = \boxed{\frac{-4x + 17}{-x^2 + 9x - 20}}$$

$\text{B} = \dfrac{3}{x+8} + 5$ $\quad \text{E} = \dfrac{4x+1}{x-4} - \dfrac{3}{2}$ $\quad \text{G} = \dfrac{x(x+1)}{x^2+2} - 3$ $\quad \text{J} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3}{x}$ $\quad \text{L} = \dfrac{4}{x-4} - \dfrac{3}{x+1}$

$\text{C} = 5 - \dfrac{2}{x^2+1}$ $\quad \text{H} = \dfrac{x}{x-2} + 4x + 2$ $\quad \text{M} = \dfrac{2x+2}{2x-1} + \dfrac{3x}{x+3}$

$\text{D} = \dfrac{x}{x+1} - 3$ $\quad \text{F} = \dfrac{3x}{x+1} - x$ $\quad \text{I} = \dfrac{2}{x-4} + \dfrac{3}{x}$ $\quad \text{K} = \dfrac{2x+4}{x-2} + \dfrac{1}{2}$

Puissances

Soient a et b deux nombres réels non nuls. Soient n et p deux entiers relatifs.

- $a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$
- $a^0 = 1$
- $(a^n)^p = a^{n\times p}$
- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Exercice 3

Simplifier :

$A = 5^3 \times 5^7$

$B = 3 \times 3^{-10}$

$C = 4 \times 2^3$

$D = \left(\dfrac{9}{5}\right)^{-4} \times \dfrac{9}{5}$

$E = \dfrac{3^{12}}{3^5}$

$F = \dfrac{4}{4^{-5}}$

$G = 5^2 \times 3^2$

$H = 2^4 \times 7^4$

$I = \dfrac{25^{-2}}{10^{-2}}$

Exercice 4

Soit n un entier naturel. Simplifier :

$A = 3^n \times 3^2$

$B = 4 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$C = -5^n + (-1)^n \times 5^n$

$D = (-1)^n - 2 \times (-1)^n$

$E = 2^{n+1} - 2^n$

$F = \dfrac{2}{3^n} + \dfrac{3}{2^n}$

Identités remarquables

Soient a et b deux nombres réels.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exercice 5

Soient x et y deux réels. Développer et réduire efficacement :

$A = (x+7)(3-2x) + (5x-2t)(4x+1)$

$B = (5x-2)(5x-8) - (3x-5)(x+7)$

$C = (2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$

$D = (x+8)^2$

$E = (3x-9)^2$

$F = (x+7)(x-7)$

$G = (4y-5)(4y+5)$

$H = (6-2x)^2$

$I = (2x-6)(x+2) + 5(x+2)$

$J = (2x+1)^2 - 49$

$K = (x-2)^2 - 2(x-2)$

$L = (x+5)^2 - 7x(x+5)$

$M = (x-3)^2 - (x-1)(x-2)$

$N = (x+1)^2 - (x-1)^2$

Exercice 6

Soit x un réel. Factoriser à l'aide d'un facteur commun ou en reconnaissant une identité remarquable :

$A = (2x-1)(x-5) + (3x+7)(x-5)$

$B = (2x+5)(x-3) + (2x+5)(-3x+1)$

$C = (2x+3)^2 + (x-2)(2x+3)$

$D = (5-2x)(2x+1) + (2x-5)^2$

$E = x^2 + 8x + 16$

$F = x^2 - 20x + 100$

$G = x^2 - 16$

$H = 4 - (1-3x)^2$

$I = (3-2x)^2 - 121$

Égalités

On transforme une égalité en une égalité équivalente lorsque :

- on ajoute ou on retranche un même nombre aux deux membres de cette égalité,
- on multiplie ou on divise les deux membres de cette égalité par un même nombre non nul.

Équation produit nul

« Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. »

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions qui peuvent dépendre d'un nombre réel x. On a :

$$A(x)B(x) = 0 \iff A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$$

Exercice 7
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$\mathrm{E}_1 :\ 5(x+3) = -3+2x$

$\mathrm{E}_2 :\ \dfrac{x+3}{3} - \dfrac{4x-1}{6} = 3 + \dfrac{x}{3}$

$\mathrm{E}_3 :\ 4x-2 = -3(7-x)$

$\mathrm{E}_4 :\ \dfrac{x+5}{2} - \dfrac{2x-7}{5} = 2 + \dfrac{3x}{10}$

$\mathrm{E}_5 :\ (3x+1)(x-5) = 0$

$\mathrm{E}_6 :\ (3x+7)(4x-8) = 0$

Exercice 8
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$. (On pourra penser à se ramener à une équation du type « $x^2 = a$ » ou bien encore à factoriser pour se ramener à une équation produit nul).

$\mathrm{E}_1 :\ (3x+2)(4x-2) = (4x-2)(x-6)$

$\mathrm{E}_2 :\ x^2 - 49 = 0$

$\mathrm{E}_3 :\ 9x^2 - 36 = 0$

$\mathrm{E}_4 :\ (2x+1)^2 - 49 = 0$

$\mathrm{E}_5 :\ (x+5)^2 - 7x(x+5) = 0$

Exercice 9
Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe des expressions suivantes :

1) $(x+3)(6-x)$
2) $x(2x+6)$
3) $(2x+1)(3-5x)$

Inégalités

On peut ajouter ou retrancher un même nombre c aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente.

$A(x) \leqslant B(x) \iff A(x)+c \leqslant B(x)+c$

$A(x) \leqslant B(x) \iff A(x)-c \leqslant B(x)-c$

On peut également multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre non nul mais il faut penser à changer le sens de l'inégalité lorsque ce nombre est négatif :
Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions qui peuvent dépendre d'un nombre réel x.

- Si $a > 0$ alors $A(x) \leqslant B(x) \iff aA(x) \leqslant aB(x)$.
- Si $a < 0$ alors $A(x) \leqslant B(x) \iff aA(x) \geqslant aB(x)$.

Exercice 10
Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

Exemple corrigé : On cherche à isoler l'inconnue (souvent appelée x) en utilisant **uniquement** les quatre opérations arithmétiques pour « contrarier » les opérations qui sont appliquées à l'inconnue :

$$\begin{aligned} 3x+2 \geqslant 8 &\iff 3x+2-2 \geqslant 8-2 \text{ on retranche 2 aux deux membres} \\ &\iff 3x \geqslant 6 \\ &\iff 3x \div 3 \geqslant 6 \div 3 \text{ on divise les deux membres par 3} \\ &\iff x \geqslant 2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à 2 : $S = [2; +\infty[$.

$\mathrm{I}_1 :\ x+4 < -7$

$\mathrm{I}_2 :\ 3x < -2$

$\mathrm{I}_3 :\ -2x < 8$

$\mathrm{I}_4 :\ -5x \geqslant -15$

$\mathrm{I}_5 :\ 5x-3 \leqslant -4x$

$\mathrm{I}_6 :\ -3x+15 \geqslant -72-2x$

$\mathrm{I}_7 :\ 14x-25 \leqslant 17x+50$

$\mathrm{I}_8 :\ 12x+3 \geqslant 12x$