Exercices préparatoires
Mathématiques appliquées

Ces quelques exercices n'ont aucunement pour but de commencer prématurément le programme mais de revoir quelques points calculatoires qui peuvent entraver vos raisonnements en début d'année. Rien de bien nouveau donc mais des remarques importantes pour la suite.

J'ai rappelé quelques méthodes, quelques résultats de cours à savoir et traité des exemples pour que vous ayez un modèle rédactionnel pour les autres.

Simplifications

Pour la réduction au même dénominateur, il est important de choisir comme dénominateur commun le plus petit possible (celui contenant le moins de facteurs), c'est à dire le plus petit commun multiple lorsque l'on est en présence d'entiers. Pour ce faire, on décompose les dénominateurs en produits de facteurs premiers. On note les entiers premiers présents et leur ordre de multiplicité et le ppcm sera obtenu en **multipliant tous les facteurs premiers apparaissant, élevés à la plus grande des puissances présentes.**
La méthode se généralise pour les fonctions rationnelles.
Un exemple concret :

Réduction au même dénominateur : Comment réduit-on par exemple la somme $\frac{13}{28}+\frac{5}{42}$ au même dénominateur ?

En tout cas, pas comme ça : $\frac{13}{28}+\frac{5}{42}=\frac{13\times 42+5\times 28}{28\times 42}=\frac{686}{1176}$.

— On commence par déterminer le **plus petit dénominateur commun** des fractions $\frac{13}{28}$ et $\frac{5}{42}$. Il vaut ici : $84=2^2\times 3\times 7$ car : $28=2^2\times 7$ et $42=2\times 3\times 7$ — on a conservé la plus grande puissance de chaque nombre premier.

— On réduit ensuite avec **ce** plus petit dénominateur commun et on n'oublie pas de présenter le résultat sous forme irréductible : $\frac{13}{28}+\frac{5}{42}=\frac{13\times 3}{28\times 3}+\frac{5\times 2}{42\times 2}=\frac{49}{2^2\times 3\times 7}=\frac{7^2}{2^2\times 3\times 7}=\frac{7}{12}$.

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A=\frac{7}{15}+\frac{8}{9}-\frac{5}{6}$
2. $B=\frac{1}{45}+\frac{1}{60}$
3. $C=\frac{x-3}{x(x-2)}+\frac{2}{x^2-4}$
4. $D=\frac{x-5}{x^2+2x-3}-\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x-1}$
5. $E=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2(x-1)}$
6. $F=\ln(7\sqrt{2})-\ln(4\sqrt{2})+\ln(9)$
7. $G=\frac{4^n}{2^{n+1}}-2^n$
8. $H=(-1)^n\times(-2)^{n-1}$
9. $\frac{3^5\times 2^{-3}}{(9^{-1}\times 2^3)^3}$.
10. $\dfrac{\frac{2^3\times 5^{-3}}{4\times 25}}{\frac{10^2\times 2}{5^8}}$.
11. $\frac{e^{2x+3}}{e^{x+1}}$.

Réponse du $\boxed{C}$

$$C = \frac{x-3}{x(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x+2)}$$

le plus petit dénominateur commun est donc $x(x-2)(x+2)$

$$= \frac{(x-3)(x+2)+2x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2-3x-6+2x}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-x-6}{x(x-2)(x+2)}$$

on pose :

$P(x) = x^2 - x - 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

P est un polynôme du second degré :

$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$ donc P a 2 racines distinctes :

$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-3)(x+2)$

D'où $C = \frac{(x-3)\cancel{(x+2)}}{x(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{x-3}{x(x-2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition-théorème **(Rappels sur les puissances)**

- **Définition :** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
  On appelle x *puissance* n le nombre x^n défini par : $x^n = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$ avec : $x^0 = 1$ par convention.

  Si : $x \neq 0$, on appelle x *puissance* $-n$ le nombre x^{-n} défini par : $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \overbrace{\frac{1}{x} \times \ldots \times \frac{1}{x}}^{n \text{ fois}}$.
- **Règles de calcul :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$: $x^{m+n} = x^m x^n$, $x^{mn} = (x^m)^n$ et $(xy)^n = x^n y^n$.

  Ces formules sont encore vraies si m ou n est négatif à condition que x et y soient non nuls.

Définition-théorème **(Rappels sur les racines carrées)**

- **Définition :** Soit $x \geqslant 0$. Il existe un et un seul réel $r \geqslant 0$ pour lequel : $x = r^2$. On l'appelle la *racine carrée de* x et on le note $\sqrt{x}$.
- **Effet sur une somme ou un produit :** Pour tous $x, y \geqslant 0$: $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$,
  En outre : $\sqrt{x^2} = |x|$.

Résolutions d'inéquations

- On commence par cherche le **domaine de validité** de l'inéquation.
- On se ramène "presque" toujours à une comparaison à zéro en transposant le membre de droite dans le membre de gauche par exemple. On obtient alors une inéquation de la forme $u(x) \geqslant 0$ par exemple à résoudre.

1. si $u(x)$ est un **quotient ou un produit**, on fait un **tableau de signes.**
2. si $u(x)$ est la **somme de termes** dont des fractions, on réduit au même dénominateur, on factorise au maximum et on fait un tableau de signes.
3. Si u est un **polynôme du second degré** : cf le rappel ci-dessous.
4. Soi $u(x)$ est la **somme de termes positifs** alors $u(x)$ est positif pour tout x réel.
5. On peut également être amener à résoudre proprement dit l'équation en faisant un enchainement de fonctions.
6. On peut être amené à poser "$X =$".

Résoudre les inéquations suivantes

1. $\dfrac{1-x}{x^3-9x} \leqslant 0$
2. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x} \geqslant 2$
3. $(\ln(x))^2 < 1$ et $\ln(x^2) < 1$.
4. $e^{2x} - 2e^x + 1 \geqslant 0$
5. $x \geqslant \dfrac{1}{x}$
6. $x^3 + 2x^2 - 3x \geqslant 0$
7. $2x^2 \leqslant x + 1$.
8. $x^2 > 0$

Réponse du $\boxed{5}$

$x \geqslant \dfrac{1}{x}$ L'inéquation n'a de sens que si $x \neq 0$.
On la resout donc sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$x \geqslant \frac{1}{x} \iff x - \frac{1}{x} \geqslant 0$$

2 inéquations sont équivalentes ssi elles ont le même ensemble de solutions

$$\iff \frac{x^2-1}{x} \geqslant 0$$

$$\iff \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geqslant 0$$

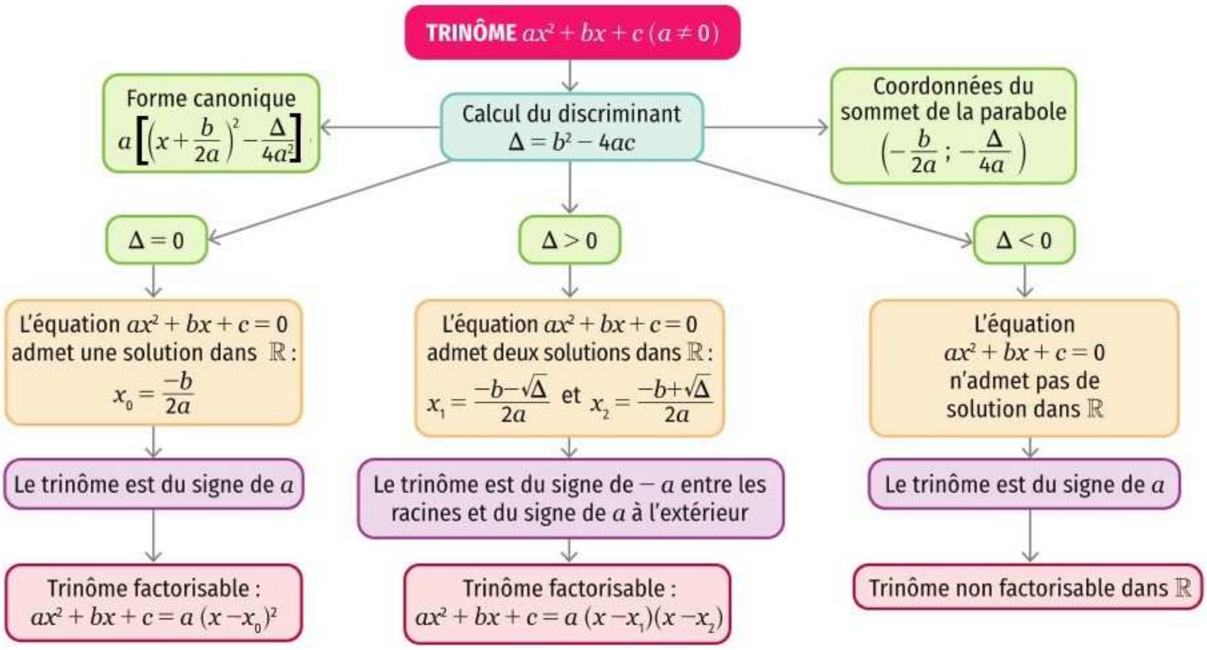
⚠ Comme on ne connait pas le signe de x, on ne peut pas multiplier par x de part et d'autre

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-1}{x}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

du signe de $a = 1$ (ds $ax+b$) à droite du zéro

Valeur interdite

$$\mathcal{S} = [-1;0[\cup [1;+\infty[$$



On doit être très prudent quand on passe à la racine carrée. Pour le moment, on s'interdira de le faire. Comme on s'interdira de multiplier ou de diviser par une quantité contenant des x si on n'en connait pas le signe.

Ensemble de définition

Soit u une fonction définie sur un ensemble I.

- $\sqrt{u(x)}$ existe si et seulement si $u(x) \geqslant 0$ et $x \in I$.
- $\ln(u(x))$ existe si et seulement si $u(x) > 0$ et $x \in I$.
- $\dfrac{1}{u(x)}$ existe ssi $u(x) \neq 0$ et $x \in I$.

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x + 2x}{x^3 - \dfrac{1}{x}}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 + \ln(x)}{e^x - 1}$
4. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Réponse du $\boxed{1}$

$f(x)$ existe $\boxed{\text{ssi}}$ $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x} \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ résolue en 5 des exemples de résolution d'inéquations

f est définie sur $[-1\,;0[\,\cup\,[1\,;+\infty[$

Ne pas confondre « **la racine carrée est positive** » et « **la fonction racine carrée est définie sur** $[0;+\infty[$ ».
Dans le premier cas, on dit que l'image (le résultat du calcul) est positive, ce qui se traduit par le fait que la courbe de la fonction carrée est située au dessus de l'axe des abscisses.
Dans le deuxième cas, on dit que l'on ne peut considérer la racine carrée que d'un nombre positif, ce qui se trouve sous la racine (le radicand) doit être positif pour que le calcul puisse se faire. Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe de fonction racine carrée est dans le premier quadrant.

Prouver une égalité

Pour prouver que deux expressions sont égales, on peut :

1. Partir d'une des quantités et la transformer pour arriver à l'autre.
2. Transformer les deux expressions et aboutir à une même troisième.
3. Montrer que la différence est nulle.

Démontrer les égalités suivantes :

1. Montrer que pour tout x réel, $e^{-x}\ln(1+e^x) = \dfrac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$.

2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left(\dfrac{16}{9}\right)^{-n+1} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2n-1} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{9}{16}\right)^{n-1}$.

3. Montrer que $\ln(2+\sqrt{3}) = -\ln(2-\sqrt{3})$.

On ne part surtout pas de l'égalité en elle-même, ce qui supposerait que l'égalité est initialement vraie

Reponse du $\boxed{3}$

Montrons que $\ln(2+\sqrt{3}) = -\ln(2-\sqrt{3})$ (1)

Pour cela, formons la différence et montrons qu'elle est nulle

$$\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = \ln\left[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right]$$

On $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \ln\left[2^2 - (\sqrt{3})^2\right]$$
$$= \ln[4-3]$$
$$= \ln 1$$
$$= 0$$

D'où l'égalité (1)

Soient a et b deux réels strictement positifs, $n \in \mathbb{Z}$ et u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur I.

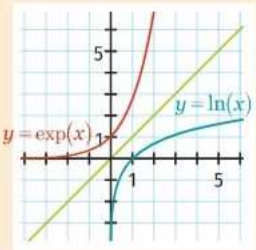
LOGARITHME NÉPÉRIEN

$\ln(a)$ est la solution de $e^x = a$, cela implique $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

La fonction logarithme népérien :
- est définie sur $]0\,;+\infty[$;
- est strictement croissante ;
- sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$ avec $x > 0$.

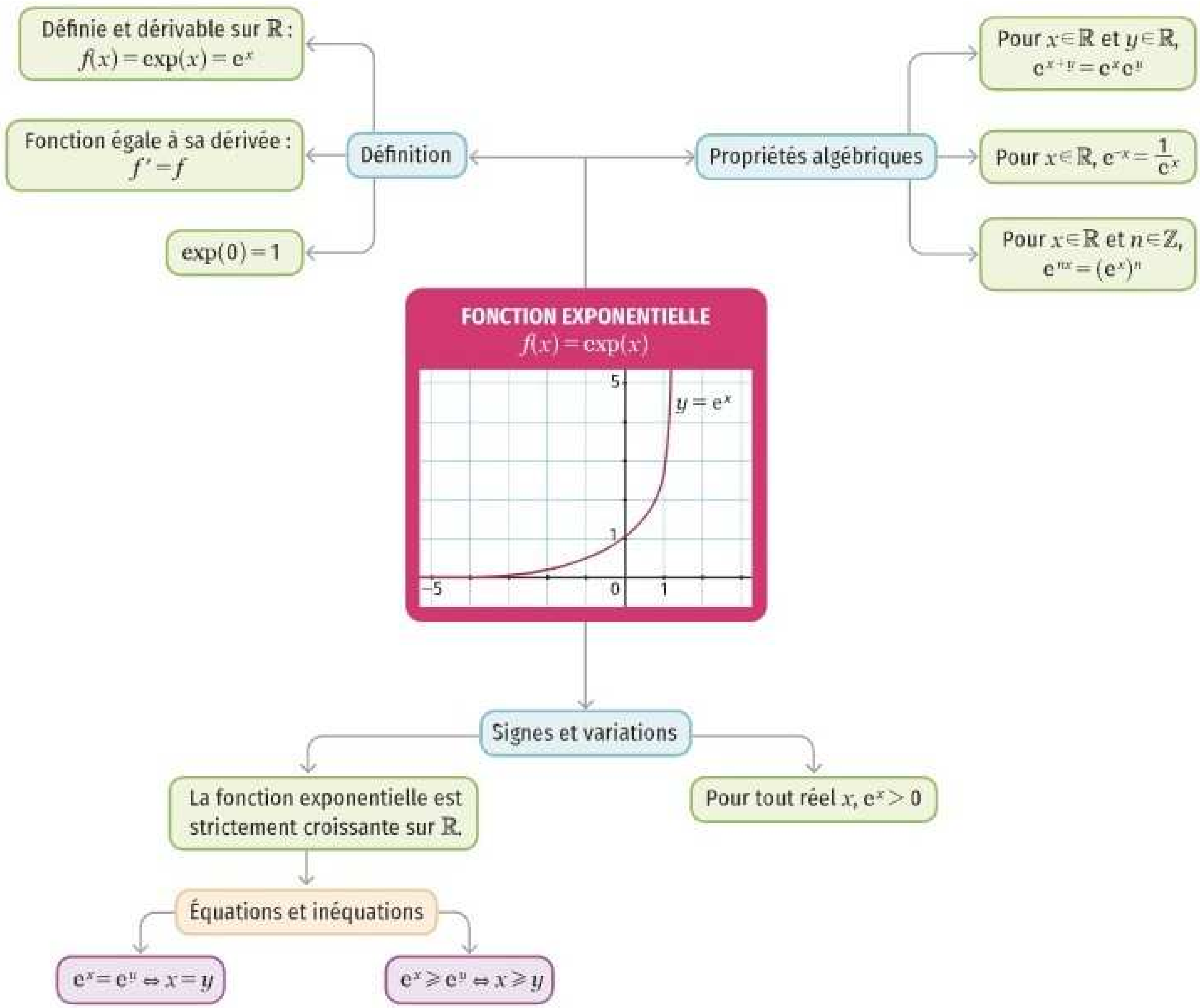
Fonction réciproque de la fonction exponentielle



$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$

$\ln(u)$ a le même sens de variation que u sur I

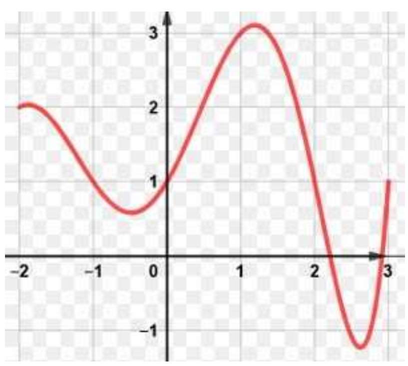
Limites et croissances comparées :
- $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$ pour $n > 0$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ pour $n > 0$



Notion d'antécédents et d'images

Répondre aux questions suivantes :

1. Soit une fonction f dont la courbe est la suivante :



(a) Sur quel ensemble est définie f ? On appelle cet ensemble **l'ensemble de définition de** f

(b) Existe-t-il des réels ayant même image par f ? Le prouver

(c) Existe-il des réels n'ayant pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}$? Le prouver.

(d) Quels sont les réels ayant des antécédents par f ? On appelle cet ensemble **l'ensemble image de** f.

(e) Existe-t-il un réel n'ayant qu'un seul antécédent par f ?

(f) Tracer sur ce même repère une courbe d'une fonction g telle que tout réel de $[-1, 3]$ admet un unique antécédent par g dans $[-2, 3]$

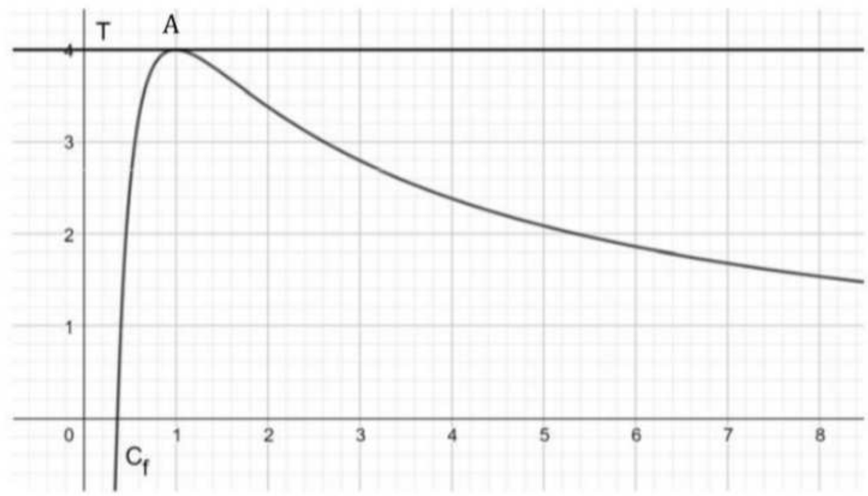
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{2x^2} - 3$.

   Reprendre les questions (a), (b), (c) (d) (e) précédentes (*pour la question (d), on pourra chercher les antécédents d'un réel y par f en résolvant $f(x) = y$*).

Détermination de constantes

Exercice : Etude de fonctions

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. La courbe C_f admet une tangente horizontale T au point $A(1, 4)$.



1. Donner $f(1)$ et $f'(1)$.

   On admet que la fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{a + b\ln(x)}{x}$ avec a et b deux nombres réels.

2. Déterminer la valeur de a et de b.

3. Calculer alors f'' et étudier la convexité de f.

Démonstration d'inégalités

On peut :
- partir de la condition sur x et faire un enchainement de fonctions pour arriver à l'inégalité demandée.
- former la différence et étudier son signe.
- former la différence et faire l'étude d'une fonction auxiliaire afin de chercher si celle-ci n'admet pas un maximum ou un minimum

Répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 2$, $\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{6}$
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $2^{n-1}(n+1) \geqslant 2^n$.
3. Montrer que pour tout x réel, $e^x \geqslant x+1$.

Calculs de dérivées

f(x)	f'(x)
c	0
x	1
ax	a
x^2	$2x$
x^n	$n \times x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

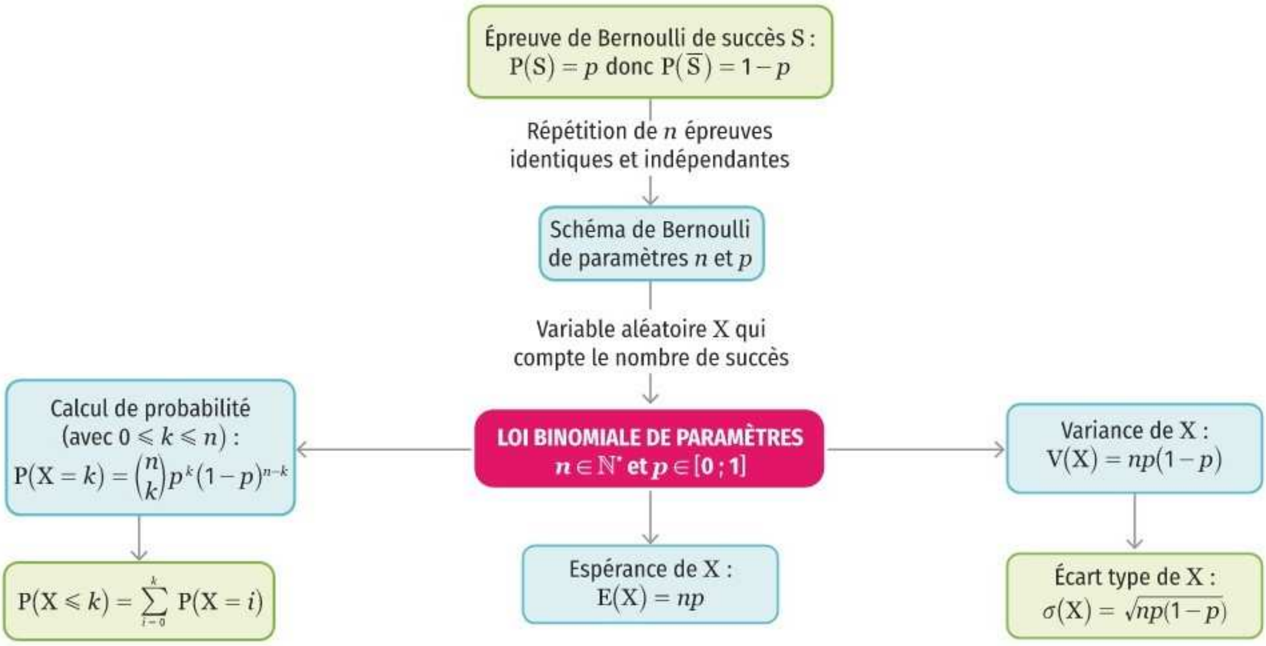
$f(x)$	$f'(x)$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u' \times e^u$
$ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée

1. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)x}$
3. $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 6x - 7$ pour tout x réel.
4. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
5. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 1}$ pour tout x réel.
6. $f(x) = \dfrac{3\ln(x) + 1}{e^x - 1}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
7. $f(x) = (3x^2 + 1)^3$ pour tout x réel.
8. $f(x) = e^{x^2 - 3x + 1}$ pour tout x réel.

5. $f(x) = \ln\left(\frac{x-5}{2x-1}\right) + x$: déterminer l'ensemble de définition, la dérivée et les variations de cette fonction.

Schéma de Bernoulli



Exercice :Lors d'une Kermesse, les organisateurs proposent un jeu de hasard.
On admet que la probabilité de gagner de l'argent est de 0,32.
On appelle partie gagnée, une partie qui rapporte de l'argent.

1. Mathilde décide de faire trois parties de ce jeu.

   Les parties sont supposées indépendantes les unes des autres.

   (a) Quelle loi suit le nombre de parties gagnées (bien justifier) ? Faire un arbre relatant cette expérience.
   (b) Calculer la probabilité qu'elle ne gagne aucune partie.
   (c) Calculer la probabilité qu'elle en gagne au moins une.
   (d) Calculer la probabilité qu'elle en gagne deux sur les trois.

2. Elle décide maintenant de faire n parties. Combien de parties doit-elle faire au minimum pour que la probabilité qu'elle en gagne au moins une soit supérieure ou égal à 90% ?

Probabilités et suites

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie.
Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7.
Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :
- G_n : "Pierre gagne la n^{ieme} partie"
- P_n : "Pierre perd la n^{ieme} partie".
On pose $p_n = P(G_n)$ et $q_n = P(P_n)$.

1. (a) Déterminer p_1, $P_{G_1}(G_2)$, $P_{P_1}(G_2)$.
   (b) Justifier que pour tout n entier naturel non nul, $p_n + q_n = 1$.
   (c) Faire un arbre pondéré entre l'instant n et l'instant $n+1$
   (d) Démontrer, pour tout entier n non nul, que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.

2. On pose pour tout n non nul, $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.
   (a) Prouver que la suite (u_n) est une suite géométrique et exprimer u_n en fonction de n.
   (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Quelques conseils pour réussir à apprendre un cours de Mathématiques

- Dans un premier temps, le soir même, on **relit le cours** et les exercices et on les comprend. Si des passages vous résistent, allez voir le professeur dès le lendemain pour qu'il vous aide à lever vos difficultés.

- Il faut ensuite apprendre le cours et cela passe par l'écrit : il faut recopier les formules et démonstrations jusqu'à ne plus faire d'erreurs. Essayez de refaire le raisonnement, comparez, corrigez et refaites-le en regardant de moins en moins votre cours.

N'apprenez pas le cours sans les exercices. Allez plutôt faire des rappels de cours tout le temps à l'intérieur des exercices, sur chaque question. Vous faites le rappel en rouge dans le cas général, puis vous l'appliquez dans le cas de l'exercice. Vous pouvez faire ce travail dans un cahier de méthodes pour pouvoir vous y reporter en cas d'oubli.

- Une fois le cours appris (ce qui signifie aussi les exercices compris, refaits et assimilés), **faites des « tests de la feuille blanche » régulièrement.** L'idée est simple : on prend une feuille blanche et on écrit tout ce que l'on pense savoir sur un chapitre donné, sans consulter de formulaire. Sur les suites, par exemple, on écrira tout le cours sur les suites géométriques, les suites arithmético-géométriques, les suites récurrentes linéaires double, on donne les méthodes d'étude de la monotonie en mentionnant à chaque fois un exemple en tête que vous savez traiter... Une fois que vous aurez fini, il faudra aller vérifier dans un formulaire si toutes vos propositions sont correctes.

- Ensuite, **recopiez dans un petit cahier** les formules et propriétés que vous avez du mal à retenir sur le moment, **les difficultés calculatoires que vous avez rencontrées, les règles de calcul que vous avez oubliées**....

- Enfin, pour l'organisation, **marquez le début de votre période de travail**, la fin, en décomptant les pauses pour voir combien de temps effectif vous travailler dans votre semaine. Cela vous permettra de prendre conscience du découpage de votre semaine et de la difficulté de travailler efficacement.