I. Nombre dérivé et tangente

Définition **Taux d'accroissement**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre de I.
A tout nombre h non nul, tel que $a+h \in I$, on associe le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ appelé taux d'accroissement de f entre a et $a+h$.

Définition **Nombre dérivé**

Soir f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un nombre de I et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.
Dire que f est dérivable en a, c'est dire que lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement tend ver un réel L.
Ce nombre L est appelé nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.
Ainsi, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Vous avez vu en cours cette année que graphiquement le nombre dérivée en a correspondait à une position « limite » d'une droite passant par deux point, dont l'un d'abscisse a, de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f : la tangente au point d'abscisse a. Ainsi, on a le résultat suivant :

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et a un réel tel que $a \in I$.
Si f est dérivable en a alors la droite passant par $A\,(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.

Propriété

L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en A est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

II. Fonction dérivée et fonction de référence

Définition

On dit que f est **dérivable sur** I lorsque f admet en tout x de I un nombre dérivé, $f'(x)$.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de** f (ou plus simplement **dérivée de** f) la fonction, notée f', qui, à tout x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x.

Théorème **Tableau des dérivées usuelles**

Fonction	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x)=k$ (fonction constante)	dérivable sur $\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$ sur $\mathbb{R}$	dérivable sur $\mathbb{R}$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^2$ sur $\mathbb{R}$	dérivable sur $\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^3$ sur $\mathbb{R}$	dérivable sur $\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$	dérivable sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$	dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Généralisation		
$f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{R}$	dérivable sur $\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{R}^*$	dérivable sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x)=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$

III. Opérations sur les fonctions dérivables

On considère une fonction f définie sur un intervalle I ; Tous les résultats suivants sont **admis**.

u et v sont des fonctions définies et dérivables sur I	**Si $f(x)$ s'écrit**	**alors f est dérivable sur I et $f'(x)$ est égale à**
Somme $u+v$	$f(x)=u(x)+v(x)$	$f'(x)=u'(x)+v'(x)$
Différence $u-v$	$f(x)=u(x)-v(x)$	$f'(x)=u'(x)-v'(x)$
Produit par un nombre réel $\boldsymbol{\lambda}$ $\lambda.u$	$f(x)=\lambda.u(x)$	$f'(x)=\lambda.u'(x)$
Produit de deux fonctions $u.v$	$f(x)=u(x)\times v(x)$	$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$
Inverse $\dfrac{1}{v(x)}$ où $v(x)\neq 0$ pour tout x de I	$f(x)=\dfrac{1}{v(x)}$	$f'(x)=-\dfrac{v'(x)}{[v(x)]^2}$
Quotient $\dfrac{u}{v}$ où $v(x)\neq 0$ pour tout x de I	$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{[v(x)]^2}$

IV. Extremums et sens de variation

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si pour tout x de I :

- $f'(x) > 0$, alors f est croissante sur I.
- $f'(x) < 0$, alors f est décroissante sur I.
- $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Définition

- On dit qu'une fonction f admet un minimum local $f(a)$ lorsque pour tout x suffisamment proche de a, $f(x) \geq f(a)$.
- On dit qu'une fonction f admet un maximum local $f(b)$ lorsque pour tout x suffisamment proche de b, $f(x) \leq f(b)$.

Dans les deux cas, on parle d'extremum locaux, c'est à dire des valeurs minimales ou maximales de la fonction *localement*.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur I. Soit x_0 appartenant à I, distinct des extrémités de I.

- Si f a un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
- Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0, alors f possède un extremum local en x_0.

Pour ne pas perdre la main

Exercice 1

Calculer la fonction dérivée de la fonction u définie sur $]2;\infty[$ par :

$$u(x) = \frac{2x+1}{-x+2}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$$

Existe-t-il des réels a tels que $f'(a) = 2$?

Exercice 3

Déterminer les points de la courbe d'équation $y = \dfrac{4}{x}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 1$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^3 - 4x^2$.

Existe-t-il des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ? Si oui, lesquels ?

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$.

Calculer sa dérivée et donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 1.

Exercice 6

Soit f et h les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\left(1+\sqrt{x}\right) \quad \text{et} \quad h(x) = \left(x+\sqrt{x}\right)^2$$

Déterminer les fonctions f' et h'.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 4x$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x + 5$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + x^2$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + 1$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le minimum de f sur $[0;+\infty[$.
3. Déterminer le signe de f sur $[0;+\infty[$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Existe-t-il des réels tels que $x^3 > 3x + 2$?

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

1. Étudier le sens de variation de f.
2. Déterminer le minimum de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice 13

1. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$x^2 - \frac{1}{x}$$
2. Calculer $f(1)$
3. Déterminer le signe de f sur $]0;+\infty[$.
4. Existe-t-il des réels positifs tels que $x^2 \leqslant \dfrac{1}{x}$?

Exercice 14

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 3x - 1$$

1. Démontrer que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point $A\left(a; f(a)\right)$ est donnée par $y = (2a-3)x - a^2 - 1$.
2. Existe-t-il un point pour lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
3. Existe-t-il un point pour lequel la tangente passe par l'origine du repère ?