Calcul algébrique

I. Principe de récurrence

1. Récurrence simple

• Principe de *récurrence (simple)* : on veut montrer qu'une propriété, dépendant de n un entier naturel, est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ où n_0 est un entier naturel (en général, $n_0 = 0$ ou 1).
On note $\mathscr{P}(n)$ cette propriété. On procède en trois temps :
– [initialisation] On montre que $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie par une démonstration à adapter suivant l'exercice.
– [hérédité] On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n \geqslant n_0$ fixé. On montre alors, sous l'hypothèse que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi.
– [conclusion] On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

• Remarque : Le principe de récurrence, pour imager, s'apparente à la montée d'une échelle :
– si on sait monter sur le premier barreau (initialisation),
– si, une fois arrivé à un barreau donné, on sait monter sur le suivant (hérédité),
– alors on sait monter tout en haut de l'échelle (conclusion).

• Exemples (1)

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant :
$$u_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \ln(1+u_n)$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n > 0$.
– L'initialisation se fait pour $n = 1$ car la propriété concerne les $n \in \mathbb{N}^*$. On constate que $u_0 = 2 > 0$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
– On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n \geqslant 1$ fixée (on précise n supérieur ou égal au rang de l'initialisation). On veut montrer $\mathscr{P}(n+1)$: $u_{n+1} > 0$.
Par hypothèse de récurrence on a $u_n > 0$. On effectue une série d'opérations pour obtenir l'expression u_{n+1} :
$$\begin{aligned} & u_n > 0 \text{ donc } u_n + 1 > 1 \\ & \qquad \text{donc } \ln(u_n+1) > \ln 1 = 0 \qquad \text{par croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ & \qquad \text{donc } u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$
donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
– On a donc montré par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$
2. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: $(1+x)^n \geqslant 1+nx$
– L'initialisation se fait avec $n = 0$ car la propriété concerne les $n \in \mathbb{N}$. On calcule séparément les deux membres de l'inégalité : $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$. On constate que $1 \geqslant 1$, donc pour $n = 0$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
– On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n \geqslant 0$ fixé (on précise toujours n supérieur ou égal au rang d'initialisation). On veut montrer $\mathscr{P}(n+1)$: $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$.
Par hypothèse de récurrence, on a :
$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \qquad \text{donc} \qquad (1+x)^{n+1} \geqslant (1+x)(1+nx) \qquad (\text{puisque l'on multiplie par } 1+x>0)$$
Or : $(1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geqslant 0} \geqslant 1 + (n+1)x$
On a donc finalement :
$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$$
donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
– On a donc montré par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

• Remarque : L'initialisation est fondamentale ! En effet, on considère la suite définie par récurrence par :
$$u_0 = -1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = (n+1)u_n$$
Essayons de monter que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n)$: $u_n \geqslant 0$.
– on oublie l'initialisation...
– on suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie pour $n \geqslant 1$ fixé. On veut montrer $\mathscr{P}(n+1)$: $u_{n+1} \geqslant 0$. On a :
$$u_{n+1} = \underbrace{(n+1)}_{\geqslant 0}\underbrace{u_n}_{\geqslant 0} \geqslant 0 \qquad \text{car } u_n \geqslant 0 \text{ par hypothèse de récurrence}$$
donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
– il semble que l'on a montré que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant 0$.
Ce résultat est manifestement faux, car on calcule :
$$u_0 = -1, \quad u_1 = -1 < 0, \qquad u_2 = -2 < 0\ldots$$

2. Récurrence double

Le principe de récurrence (simple) repose sur le le fait que pour montrer $\mathscr{P}(n+1)$ on a seulement besoin de supposer $\mathscr{P}(n)$ vraie. Mais dans certains cas, cela ne suffit pas, il peut être nécessaire de supposer que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ sont vraies pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$. Une telle récurrence est appelée *récurrence double*. Elle nécessite deux initialisations, pour $n = n_0$ et $n = n_0 + 1$.

• principe récurrence double : on veut montrer qu'une propriété, dépendant de n un entier naturel, est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ où n_0 est un entier naturel (en général, $n_0 = 0$ ou 1).
On note $\mathscr{P}(n)$ cette propriété. On procède en trois temps :
– [initialisation] On montre que $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont vraies par une démonstration à adapter suivant l'exercice.
– [hérédité] On suppose que $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n)$ sont vraies pour $n \geqslant n_0 + 1$ (dernier rang de l'initialisation) fixé. On montre alors, sous l'hypothèse que $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n)$ sont vraies, que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi.
– [conclusion] On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

• Exemple (2)

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n$.
On procède par récurrence double en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) : u_n \leqslant 2^n$.

- On initialise pour $n = 0$ et $n = 1$. L'énoncé donne $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, et $2^0 = 1 \geqslant u_0$ et $2^1 = 2 \geqslant 1 = u_1$, donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
- On suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies pour $n \geqslant 1$ fixé (dernier rang de l'initialisation). On veut montrer $\mathscr{P}(n+1) : u_{n+1} \leqslant 2^{n+1}$.
  Par définition de u_n, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La définition étant vraie pour tout n (ce n'est pas encore le cas de la propriété à démontrer, ne pas confondre), on peut remplacer n par $n-1$ pour obtenir : $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.
  On applique alors l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{\leqslant 2^n} + \underbrace{u_{n-1}}_{\leqslant 2^{n-1}} \leqslant 2^n + 2^{n-1}$$

  Comme de plus $2^n = 2 \times 2^{n-1}$, $2^{n-1} \leqslant 2^n$ donc finalement :

$$u_{n+1} \leqslant 2^n + 2^{n-1} \leqslant 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

  donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- On a donc montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n$

• Remarque : On peut généraliser en un principe de récurrence triple ou plus.

3. Exemple de récurrence forte

Parfois, ni la récurrence simple ni la récurrence double (ni triple...) ne suffisent : il peut être nécessaire de supposer que toutes les propriétés $\mathscr{P}(k)$, pour k variant de 0 à n, sont vraies pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$. Une telle récurrence est appelée *récurrence forte*.

• Exemple (3)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
On procède par récurrence forte. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathscr{P}(n) : u_n \geqslant 0$.

- $u_0 = 1 \geqslant 0$ donc u_0 est vraie.
- On suppose que, pour $n \geqslant 0$ fixé (le dernier rang de l'initialisation) : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
  On veut montrer $\mathscr{P}(n+1)$. On utilise alors la définition de u_{n+1} et le fait que par hypothèse de récurrence, u_0, u_1,...,u_n sont positifs, ce qui donne :

$$u_{n+1} = \underbrace{u_0}_{\geqslant 0} + \underbrace{u_1}_{\geqslant 0} + \cdots + \underbrace{u_n}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

  donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$

II. Sommes

1. Définitions et premières propriétés

• Définition (4) (*signe somme*)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$. Soient $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$ des complexes. La somme de tous ces complexes, dite "somme de $k = m$ à n des u_k", est le complexe :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n$$

Le terme général *de la somme est u_k, k est le* compteur *(ou* indice de sommation*), m et n sont les* bornes *de la somme.*

• Remarques :

- Le compteur est un *indice muet*, le choix de la lettre k dans la définition n'a aucune importance, on pourrait choisir une autre lettre (en général on utilise i, j, k, ℓ) :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{i=m}^{n} u_i = \sum_{j=m}^{n} u_j = \sum_{toto=m}^{n} u_{toto}$$

  Le compteur n'a de sens que "localement", dans la somme.
- En revanche les bornes m et n ne peuvent pas en général être modifiées, elles correspondent à des entiers fixés (qu'ils soient concrets ou définis avant).
- Si $m > n$, alors la somme est vide, elle est par convention égale à 0.
- On rencontrera parfois les notations suivantes :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{m\leqslant k\leqslant n} u_k = \sum_{k\in[\![m,n]\!]} u_k$$

• Exemples (5)

- $\sum_{k=0}^{5} k = \sum_{i=0}^{5} i = 0+1+2+3+4+5 = 15$
- $\sum_{j=2}^{4} 2^j = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 4 + 8 + 16 = 28$
- $\sum_{\ell=1}^{1} \ell^2 = 1^2 = 1$
- $\sum_{k=1}^{0} (k+1)^3 = 0 \qquad$ puisque $1 > 0$
- $\sum_{0\leqslant i\leqslant 4} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
- $\sum_{j\in[\![1,3]\!]} (j-1) = (1-1) + (2-1) + (3-1) = 0 + 1 + 2 = 3$

• Exemple (6)

De façon générale, un algorithme permettant de calculer une somme utilise une boucle for (pour). Précisément, si $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ l'algorithme suivant calcule S_n :

```
demander n à l'utilisateur
S=0     // initialisation de la somme
pour i variant de 0 à n    // puisque la somme se fait de 0 à n
   S=S+a_i    // on ajoute a_i à la valeur de S calculée
              // jusqu'alors et on affecte le résultat à S
fin pour
afficher S
```

Plus concrètement pour calculer $\sum_{k=2}^{100} \frac{\ln(k)}{k}$ on utilise l'algorithme :

```
S=0     // initialisation de la somme
pour k variant de 2 à 100    // puisque la somme se fait de 2 à 100
   S=S+ln(k)/k    // on ajoute ln(k)/k à la valeur de S calculée
                  // jusqu'alors et on affecte le résultat à S
fin pour
afficher S
```

• Proposition (7) (*règles de calcul*)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$, soient $u_m, \dots, u_n \in \mathbb{C}$, $v_m, \dots, v_n \in \mathbb{C}$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

– $\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m + \sum_{k=m+1}^{n} u_k$ *et* $\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n-1} u_k + u_n$ *(on peut isoler des termes de la somme)*

– *On généralise : soit $s \in [\![m, n]\!]$,* $\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{s} u_k + \sum_{k=s+1}^{n} u_k$

– $\sum_{k=m}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k$ *(on peut "sortir" les termes qui ne dépendent pas de k de la somme)*

– $\sum_{k=m}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} v_k$ *(on peut séparer en plusieurs sommes les termes séparés par + ou − ou inversement regrouper deux sommes en une)*

– *Les deux propriétés précédentes se traduisent par : le symbole $\sum$ est linéaire*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \forall (u_k)_{m \leqslant k \leqslant n}, (v_k)_{m \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{C}^{n-m+1}, \qquad \sum_{k=m}^{n} (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=m}^{n} u_k + \beta \sum_{k=m}^{n} v_k$$

• <u>Remarques</u> : attention, pour regrouper deux sommes en une, il est nécessaire que ces deux sommes aient les mêmes bornes !

• Exemples (8)

1. $\sum_{j=1}^{3} 5j^3 = 5\sum_{j=1}^{3} j^3 = 5(1+2^3+3^3) = 5 \times 36$
2. $\sum_{k=0}^{4} (2k+3k^2) = 2\sum_{k=0}^{4} k + 3\sum_{k=0}^{4} k^2 = 2(0+1+2+3+4)+3(0+1^2+2^2+3^2+4^2) = 2 \times 10 + 3 \times 30 = 110$
3. $\sum_{i=1}^{n} kn = n \sum_{k=1}^{n} k$
4. $\sum_{k=1}^{4} (1-k) + \sum_{i=1}^{4} i = \sum_{k=1}^{4} (1-k) + \sum_{k=1}^{4} k = \sum_{k=1}^{4} (1-k+k) = \sum_{k=1}^{4} 1 = \underbrace{1}_{k=1} + \underbrace{1}_{k=2} + \underbrace{1}_{k=3} + \underbrace{1}_{k=4} = 4$

• <u>Remarque</u> : Voici deux erreurs très graves à ne pas faire :

1. Ne jamais "sortir" de la somme un terme qui <u>dépend du compteur</u>.
$$\sum_{k=m}^{n} u_k \times v_k \neq u_k \times \sum_{k=m}^{n} v_k$$
Par exemple :
$$\sum_{k=1}^{n} k \times 2^k \neq k \times \sum_{k=1}^{n} 2^k$$
2. En général, une somme de produits n'est pas égale au produit des sommes :
$$\sum_{k=m}^{n} u_k \times v_k \neq \left(\sum_{k=m}^{n} u_k\right) \times \left(\sum_{k=m}^{n} v_k\right)$$
Par exemple :
$$\sum_{k=1}^{n} k \times 2^k \neq \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right)$$

2. Sommes usuelles

• Proposition (9)

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n \leqslant m$. On a :
$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$
Par conséquent
$$\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1 \qquad \textit{(nombre de termes dans la somme)}$$

• *Preuve de (9)*

Pour la première somme on calcule :
$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \overbrace{\underbrace{1}_{k=1} + \underbrace{1}_{k=2} + \cdots + \underbrace{1}_{k=n}}^{n \text{ termes}} = n$$
Pour la seconde on écrit :
$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{m-1} 1 + \sum_{k=m}^{n} 1 \qquad \textit{donc} \qquad \sum_{k=m}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{m-1} 1 = n - (m-1) = n - m + 1$$
□

• Proposition (10)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$.

(*i*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *(somme arithmétique)*

(*ii*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *(somme des n premiers carrés)*

(*iii*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ *(somme des n premiers cubes)*

• Preuve de (10)

(*i*) *On va donner deux démonstrations.*

(a) *On écrit cette somme en extension de deux façons et on en fait la somme :*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n & & \\ + & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 & & \\ \hline = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) & = & n\times(n+1) \end{array}$$

donc

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) *Par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathscr{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.*

– $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ *et* $\frac{1\times(1+1)}{2} = 1$ *donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.*

– *On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie pour $n \geqslant 1$ fixé. On veut montrer $\mathscr{P}(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.*

On calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \textit{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} && \textit{(par réduction au même dénominateur)}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && \textit{(en factorisant par } (n+1))\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

– *On a donc démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$*

(*ii*) *On procède par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathscr{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*

– $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ *et* $\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6} = 1$ *donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.*

– *On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie pour $n \geqslant 1$ fixé et on veut montrer $\mathscr{P}(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.*

On calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \textit{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} && \textit{(par réduction au même dénominateur)}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} && \textit{(en factorisant par } (n+1))\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6}{6}\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$ *donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.*

– *On a donc démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*

(*iii*) *à faire à titre d'exercice pour s'entraîner (par récurrence).*

□

• Remarques :

– Les formules précédentes sont aussi valables pour $n = 0$: en effet, dans ce cas les sommes sont vides donc nulles, et les formules sont toutes nulles pour $n = 0$.

– On a plus généralement :

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0 + \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

• Proposition (11) (*somme géométrique*)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

• Preuve de (11)

Si $x = 1$, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $x^k = 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

On suppose désormais $x \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

– $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1$ *et* $\displaystyle\frac{1-x^{0+1}}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$ *donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.*

– *On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie pour $n \geqslant 0$ fixé. On veut montrer $\mathscr{P}(n+1)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$.*

On calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} && \textit{(en réduisant au même dénominateur)}\\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

– *On a donc démontré que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

□

• Corollaire (12) (*nouvelles identités remarquables*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $x, y \in \mathbb{C}$:

$$x^n - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k \qquad \textit{et} \qquad x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

• Preuve de (12)

– *Première identité : si $x = 1$, alors les deux membres de l'égalité sont nuls. On suppose donc $x \neq 1$, il s'agit de la formule démontrée précédemment multipliée par $(x-1)$.*
– *Deuxième identité : si $y = 1$ on retrouve la première et si $y = 0$ les deux membres valent x^n et sont donc bien égaux. On suppose $y \neq 0$, x et on pose $X = \frac{x}{y}$. Alors $X \neq 1$ et on a :*

$$x^n - y^n = y^n\left(\left(\frac{x}{y}\right)^n - 1\right) = y^n\left(\frac{x}{y}-1\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x}{y}\right)^k = y\left(\frac{x}{y}-1\right)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

□

3. Exemples de calculs de sommes par réindiçage

a) Un exemple

Comment calculer, sans faire trop d'efforts, la somme $\sum_{k=100}^{1099} k$? On peut bien sûr utiliser la relation de Chasles, mais on peut faire autrement en essayant de se ramener à une somme connue en démarrant par exemple à $k = 1$.
On effectue un *réindiçage* (ou une *réindexation*) en posant, dans cet exemple, $i = k - 99$ (donc $k = i + 99$). Ainsi, lorsque $k = 100$, $i = 100 - 99 = 1$ et lorsque $k = 1099$, $i = 1099 - 99 = 1000$. On a :

$$\sum_{k=100}^{1099} k = \sum_{i=1}^{1000}(i+99) = \sum_{i=1}^{1000} i + \sum_{i=1}^{1000} 99 = \frac{1000\times 1001}{2} + 99\sum_{i=1}^{1000} 1 = 500500 + 99\times 1000 = 599500$$

• Remarque : Attention, on ne peut faire des réindiçages qu'en posant $i = k \pm \ell$ ou $i = -k \pm \ell$ où k est l'ancienne variable, i la nouvelle et ℓ un entier. Il n'est pas possible par exemple de poser $i = 2k$ ou $i = 3k$.

Dans le paragraphe qui suit, on exploite cette technique de calcul pour obtenir de nouvelles sommes.

b) Nouvelles sommes usuelles

• Proposition (13) (*sommes arithmétiques décalées*)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$.

$$\sum_{k=m}^{n} k = \frac{\overbrace{(m+n)}^{\text{termes extrémaux}}\ \overbrace{(n-m+1)}^{\text{nombre de termes}}}{2}$$

• Preuve de (13)

On effectue le changement d'indice $i = k - m + 1$ (donc $k = i + m - 1$, $k = m \Rightarrow i = 1$, $k = n \Rightarrow i = n - m + 1$) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} k = \sum_{i=1}^{n-m+1}(i+m-1) &= \sum_{i=1}^{n-m+1} i + \sum_{i=1}^{n-m+1}(m-1) = \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} + (n-m+1)(m-1)\\ &= \frac{(n-m+1)(n-m+2+2m-2)}{2} = \frac{(n-m+1)(n+m)}{2}\end{aligned}$$

□

• Proposition (14) (*sommes géométriques décalées*)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $x \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{k=m}^{n} x^k = \begin{cases} x^m\frac{1-x^{n-m+1}}{1-x} & \textit{si } x \neq 1\\ n-m+1 & \textit{si } x = 1\end{cases}$$

• Preuve de (14)

Si $x \neq 1$, on effectue le changement d'indice $i = k - m$ (donc $k = i + m$, $k = m \Rightarrow i = 0$, $k = n \Rightarrow i = n - m$) :

$$\sum_{k=m}^{n} x^k = \sum_{i=0}^{n-m} x^{i+m} = x^m\sum_{i=0}^{n-m} x^i = x^m\frac{1-x^{n-m+1}}{1-x}$$

Si $x = 1$ alors il y a $n - m + 1$ termes égaux à 1 dans la somme, d'où la formule. □

c) Sommes télescopiques

• Exemples (15)

- On veut calculer la somme : $\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right)$
  On pourrait bien sûr utiliser les formules, mais il est plus malin ici de séparer la

somme en deux et de réindicer :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{i=2}^{n+1}i^3-\sum_{k=1}^{n}k^3 \qquad \text{(posant } i=k+1\text{)}\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^3 \qquad \text{(en renommant l'indice } k\text{)}\\ &= \sum_{k=2}^{n}k^3+(n+1)^3-1^3-\sum_{k=2}^{n}k^3 \qquad \text{(en isolant les termes extrémaux)}\\ &= (n+1)^3-1\end{aligned}$$

On constate que le résultat est égal au dernier terme de la somme moins le premier, on appelle une telle somme une somme *télescopique*.

- Que vaut la somme $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$?

  On calcule : $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) = \ln(n+1)-\ln(1) = \ln(n+1)$ (par télescopage)

- Que vaut la somme $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$?

  Il faut retenir que : $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$

  On calcule alors : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}$ (par télescopage)

III. Produits

1. Définitions et premières propriétés

• Définition (16) (*signe produit*)

Soient $n,m\in\mathbb{N}$ avec $m\leqslant n$. Soient $u_m,u_{m+1},\dots,u_n$ des complexes. Le produit de tous ces complexes, dit "produit de $k=m$ à n des u_k", est le complexe :

$$\prod_{k=m}^{n}u_k=u_m\times u_{m+1}\times\cdots\times u_n$$

Le terme général *du produit est u_k, k est le* compteur *(ou* indice de produit*), m et n sont les* bornes *du produit.*

• Remarques :

- Le compteur est un *indice muet*, le choix de la lettre k dans la définition n'a aucune importance, on pourrait choisir une autre lettre (en général on utilise i,j,k,ℓ) :

$$\prod_{k=m}^{n}u_k=\prod_{i=m}^{n}u_i=\prod_{j=m}^{n}u_j=\prod_{toto=m}^{n}u_{toto}$$

  Le compteur n'a de sens que "localement", dans le produit.
- En revanche les bornes m et n ne peuvent pas en général être modifiées, elles correspondent à des entiers fixés (qu'ils soient concrets ou définis avant).
- Si $m>n$, alors le produit est vide, il est par convention égal à 1.
- On rencontrera parfois les notations suivantes :

$$\prod_{k=m}^{n}u_k=\prod_{m\leqslant k\leqslant n}u_k=\prod_{k\in[\![m,n]\!]}u_k$$

- Le produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul !

• Exemples (17)

- $\prod_{k=1}^{5}k=\prod_{i=1}^{5}i=1\times2\times3\times4\times5=120$
- $\prod_{j=2}^{4}2^j=2^2\times2^3\times2^4=2^{2+3+4}=2^9=512$
- $\prod_{k=1}^{0}(k+1)^3=1$ puisque $1>0$
- $\prod_{1\leqslant i\leqslant4}i^2=1^2\times2^2\times3^2\times4^2=1\times4\times9\times16=576$
- $\prod_{j\in[\![1,3]\!]}(j-1)=(1-1)\times(2-1)\times(3-1)=0\times1\times2=0$
- $\prod_{i=1}^{n}1=1\times1\times\cdots\times1=1$

• Exemple (18)

De façon générale, un algorithme permettant de calculer un produit utilise une boucle for (pour). Précisément, si $P_n=\prod_{i=0}^{n}a_i$ l'algorithme suivant calcule P_n :

```
demander n à l'utilisateur
P=1     // initialisation du produit
pour i variant de 0 à n    // puisque le produit se fait de 0 à n
   P=P*a_i    // on multiplie par a_i la valeur de P calculée
              // jusqu'alors et on affecte le résultat à P
fin pour
afficher P
```

Plus concrètement pour calculer $\prod_{j=3}^{50}\frac{k^2-1}{k}$ on utilise l'algorithme :

```
P=1     // initialisation de la somme
pour j variant de 3 à 50    // puisque le produit se fait de 3 à 50
   P=P*(k^2-1)/k    // on multiplie par (k^2-1)/k la valeur de P calculée
                    // jusqu'alors et on affecte le résultat à P
fin pour
afficher P
```

• Proposition (19) (*règles de calcul*)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$, soient $u_m, \dots, u_n \in \mathbb{C}$, $v_m, \dots, v_n \in \mathbb{C}$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

– $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} u_k = u_m \times \prod_{k=m+1}^{n} u_k$ *et* $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} u_k = \left(\prod_{k=m}^{n-1} u_k\right) \times u_n$ *(on peut isoler des termes du produit)*

– *On généralise : soit $s \in [\![m, n]\!]$,* $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} u_k = \left(\prod_{k=m}^{s} u_k\right) \times \left(\prod_{k=s+1}^{n} u_k\right)$ *(relation de Chasles)*

– $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \lambda u_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} u_k$ *(on peut "sortir" les termes qui ne dépendent pas de k de la somme mais attention à la puissance)*

– $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} (u_k \times v_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} u_k\right) \times \left(\prod_{k=m}^{n} v_k\right)$ *(on peut séparer en plusieurs produits les termes séparés par $\times$ ou $\div$ ou inversement regrouper deux produits en un)*

– $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \frac{u_k}{v_k} = \frac{\prod_{k=m}^{n} u_k}{\prod_{k=m}^{n} v_k}$ *(on peut séparer en plusieurs produits les termes séparés par $\div$ ou inversement regrouper deux produits en un)*

• <u>Remarques</u> : attention, pour regrouper deux produits en un, il est nécessaire que ces deux produits aient les mêmes bornes !

• Exemples (20)

1. $\displaystyle\prod_{j=1}^{3} 5j^3 = 5^3 \prod_{j=1}^{3} j^3 = 125(1 \times 2^3 \times 3^3) = 125 \times 216 = 27000$
2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{4} (2k^2 2^k) = 2^3 \left(\prod_{k=2}^{4} k^2\right) \times \left(\prod_{k=2}^{4} 2^k\right) = 8 \times 576 \times 512$
3. $\displaystyle\frac{\prod_{i=1}^{7} i}{\prod_{i=1}^{7} i^2} = \prod_{i=1}^{7} \frac{i}{i^2} = \prod_{i=1}^{7} \frac{1}{i} = \frac{1}{5040}$

• <u>Remarque</u> : Voici deux erreurs très graves à ne pas faire :

1. Ne jamais "sortir" du produit un terme qui <u>dépend du compteur</u>.

$$\prod_{k=m}^{n} u_k \times v_k \neq u_k \times \prod_{k=m}^{n} v_k$$

Par exemple :

$$\prod_{k=1}^{n} k \times 2^k \neq k \times \prod_{k=1}^{n} 2^k$$

2. En général, un produit de sommes n'est pas égal à la somme des produits :

$$\prod_{k=m}^{n} (u_k + v_k) \neq \left(\prod_{k=m}^{n} u_k\right) + \left(\prod_{k=m}^{n} v_k\right)$$

Par exemple :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(k + 2^k\right) \neq \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) + \left(\prod_{k=1}^{n} 2^k\right)$$

2. Exemples de calculs

• Exemples (21)

- Calculer $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{j}\right)$.

  Dans ce cas, on constate que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $1 + \frac{1}{j} > 0$, on peut appliquer le logarithme au produit afin de transformer le produit en somme :

$$\begin{aligned} \ln\left(\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{j}\right)\right) &= \sum_{j=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{j+1}{j}\right) \quad \text{(réduction au même dénominateur)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \ln\big((j+1) - \ln(j)\big) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \quad \text{(par téléscopage)} \end{aligned}$$

  Finalement, par passage à l'exponentielle il vient :

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{j}\right) = e^{\ln(n+1)} = n + 1$$

- Calculer la même somme par une autre méthode.
  On peut écrire directement :

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \frac{j+1}{j} = \frac{\prod_{j=1}^{n} (j+1)}{\prod_{j=1}^{n} j}$$

  Puis, en réindiçant la deuxième somme comme pour la technique des sommes télescopiques :

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{j=1}^{n} (j+1)}{\prod_{j=1}^{n} j} &= \frac{\prod_{i=2}^{n+1} i}{\prod_{j=1}^{n} j} \quad \text{(en posant } i = j+1\text{)} \\ &= \frac{\prod_{j=2}^{n+1} j}{\prod_{j=1}^{n} j} \quad \text{(en renommant } j\text{)} \\ &= \frac{(n+1) \times \prod_{j=2}^{n} j}{1 \times \prod_{j=2}^{n} j} \quad \text{(en isolant les termes extrémaux)} \\ &= \frac{n+1}{1} = n + 1 \quad \text{(en simplifiant la fraction)} \end{aligned}$$

IV. Sommes doubles

1. Introduction

Soient n, p deux entiers naturels non nuls. Soient $n \times p$ complexes notés a_{ij}, $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$. On peut représenter ces nombres dans un tableau à n lignes et p colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & (a_{ij}) & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} (i \text{ indice des lignes}) \\ (j \text{ indice des colonnes}) \end{array}$$

Alors la somme de tous ces complexes se note

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{\substack{i\in[\![1,n]\!] \\ j\in[\![1,p]\!]}} a_{ij}$$

C'est une somme double, il y a deux indices de sommation.
Dans le cas particulier où $p = n$, on peut noter de façon plus synthétique :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$$

2. Méthodes de calcul

On va détailler les deux principales méthodes. Pour calculer une somme double, on va se ramener au cas connu des sommes simples. Il suffit de faire d'abord la somme avec un indice, puis avec l'autre.

a) Sommation par lignes

On peut commencer par sommer tous les éléments de la première ligne, puis tous ceux de la deuxième et ainsi de suite jusqu'à la somme de la dernière ligne. Il s'agit ensuite de sommer les n résultats trouvés pour obtenir la somme totale :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & + & a_{12} & + & \cdots & + & a_{1p} & = & \alpha_1 \\ & & & & & & & & + \\ a_{21} & + & a_{22} & + & \cdots & + & a_{2p} & = & \alpha_2 \\ & & & & & & & & + \\ & & & & \dots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & + \\ a_{n1} & + & a_{n2} & + & \cdots & + & a_{np} & = & \alpha_n \\ \hline \end{array}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}$$

Cela correspond à l'écriture

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\right)}_{\text{sommes de chaque ligne}}$$

Cela correspond aussi à l'algorithme :

```
demander n et p à l'utilisateur
S=0    // initialisation
pour i variant de 1 à n    // sommation par ligne
   pour j variant de 1 à p    // sommation des termes de chaque ligne
      S=S+a_{i,j}
   fin pour
fin pour
afficher S
```

• Exemple (22)

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} ij = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} ij\right) = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{p} j\right) \qquad (\text{car } i \text{ ne dépend pas de } j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{p(p+1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2} \times \sum_{i=1}^{n} i \qquad (\text{car } p \text{ ne dépend pas de } i)$$
$$= \frac{p(p+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{np(n+1)(p+1)}{4}$$

Ce qui se calcule aussi par l'algorithme :

```
demander n et p à l'utilisateur
S=0    // initialisation
pour i variant de 1 à n    // sommation par lignes
   pour j variant de 1 à p    // sommation des termes de chaque ligne
      S=S+i*j
   fin pour
fin pour
afficher S
```

b) Sommation par colonnes

On peut commencer par sommer tous les éléments de la première colonne, puis tous ceux de la deuxième et ainsi de suite jusqu'à la somme de la dernière colonne. Il s'agit ensuite de sommer les p résultats trouvés pour obtenir la somme totale :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & & & a_{1p} & & & & \\
+ & & + & & & & + & & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & & & a_{2p} & & & & \\
+ & & + & & & & + & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
+ & & + & & & & + & & & & \\
a_{n1} & & a_{n2} & & & & a_{np} & & & & \\
\hline
\beta_1 & + & \beta_2 & + & \cdots & + & \beta_p & = & \sum_{j=1}^{p}\beta_j & = & \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}
\end{array}$$

Cela correspond à l'écriture

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} = \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)}_{\text{sommes de chaque colonne}}$$

Cela correspond aussi à l'algorithme :

```
demander n et p à l'utilisateur
S=0    // initialisation
pour j variant de 1 à p    // sommation par colonnes
   pour i variant de 1 à n    // sommation des termes de chaque colonne
      S=S+a_{i,j}
   fin pour
fin pour
afficher S
```

• Exemple (23)

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} ij = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} ij\right) = \sum_{j=1}^{p} j\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \qquad (\text{car } j \text{ ne dépend pas de } i)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} i \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \times \sum_{j=1}^{p} j \qquad (\text{car } n \text{ ne dépend pas de } j)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{p(p+1)}{2} = \frac{np(n+1)(p+1)}{4}$$

Ce qui se calcule aussi par l'algorithme :

```
demander n et p à l'utilisateur
S=0    // initialisation
pour j variant de 1 à p    // sommation par colonnes
   pour i variant de 1 à n    // sommation des termes de chaque colonne
      S=S+i*j
   fin pour
fin pour
afficher S
```

c) **Développement du carré d'une somme**

Pour développer le carré d'une somme, il faut renommer les indices (à retenir !) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \qquad (\text{renommant } i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \times a_j = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_i a_j$$

• Exemple (24)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. Autres exemples de calculs de sommes doubles

a) **Sommation des termes au dessus ou en dessous de la diagonale (avec $n = p$!)**

On veut calculer des sommes du type :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}, \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}, \qquad \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{ij}, \qquad \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{ij}$$

Il s'agit des sommes des termes qui sont au dessus de la diagonale/strictement au dessus de la diagonale/en dessous de la diagonale/strictement en dessous de la diagonale.
D'après ce qui précède, on dispose de deux façons de calculer :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} & (\text{sommation par lignes}) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} & (\text{sommation par colonnes}) \end{cases}$$

De même :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} & (\text{sommation par lignes}) \\ \displaystyle\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} & (\text{sommation par colonnes}) \end{cases}$$

(les 2 sommes restantes ont des écritures évidentes maintenant.)

• Remarques :
– Attention, dans le cas d'inégalités strictes il faut être très soigneux avec les bornes des sommes.
– En général, la sommation par colonnes donnera des calculs plus simples.

• Exemple (25)

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}j\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)=\frac{n(n+3)}{4}$$

Cette somme se calcule aussi par l'algorithme :

```
demander n à l'utilisateur
S=0    // initialisation
pour j variant de 1 à n
   pour i variant de 1 à j
      S=S+i/j
   fin pour
fin pour
afficher S
```

b) **Sommation par distinctions de cas**

• Exemple (26)

On veut calculer :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)$$

On peut représenter les termes dans un tableau pour mieux visualiser :

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&\dots&1\\1&2&2&2&\dots&2\\1&2&3&3&\dots&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&&\\\vdots&\vdots&\vdots&&n-1&n-1\\1&2&3&&n-1&n\end{pmatrix}\text{ " = " }\begin{pmatrix}i&i&i&i&\dots&i\\j&i&i&i&\dots&i\\j&j&i&i&\dots&i\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&&\\\vdots&\vdots&\vdots&&i&i\\j&j&j&&j&i\end{pmatrix}$$

On va donc séparer les cas suivant la diagonale :

- si $i\leqslant j$ alors $\min(i,j)=i$,
- si $i>j$ alors $\min(i,j)=j$.

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\min(i,j)+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\min(i,j)=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}i+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}j$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}i+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}j=\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}+\sum_{i=2}^{n}\frac{(i-1)i}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}j^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}j$$
$$=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}=\frac{n\left((n-1)(2n-1)+3(n-1)+3+3n\right)}{6}$$
$$=\frac{n\left(2n^2+3n+1\right)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Un algorithme permettant de calculer cette somme est le suivant :

```
demander n à l'utilisateur
S=0    // initialisation
pour i variant de 1 à n
   pour j variant de 1 à n
      si i<j alors S=S+i
             sinon S=S+j
      fin si
   fin pour
fin pour
afficher S
```