I. Généralités - Mode de génération d'une suite

A. Définition et vocabulaire

On appelle suite numérique réelle, une liste ordonnée de nombres réels. On peut par exemple parlé de la suite des nombres pairs, de la suite des nombres premiers ou encore de la suite des décimales de π.
Chaque élément de la suite est précisément repéré par sa position dans la liste, position pouvant être définie simplement par un entier naturel. Ainsi on a :

Définition

Une suite numérique réelle est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

<u>**Vocabulaire**</u> :

- n est l'indice.
- u_n est le terme général de la suite (u_n), le terme de rang n ou le terme d'indice n.
- u_0 est le terme initial de la suite (u_n).

B. Mode de génération d'une suite

Il existe principalement deux modes de génération d'une suite :

- Par la donnée de l'expression de u_n en fonction de n (comme pour une fonction).
  On dit alors que l'on donne la **forme explicite** de la suite
  Dans ce cas, on sait calculer n'importe quel terme de la suite (voir exemple précédent).

- Par la donnée d'un terme initial et d'une relation permettant de calculer chaque terme à partir du précédent.
  La suite est alors dite **définie par récurrence**, et la relation est appelée **relation de récurrence**.

  <u>***Exemple***</u> : Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$

C. Variations- Majoration

Définition

- Une suite (u_n) est croissante (resp strictement croissante) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp $u_{n+1} > u_n$).
- Une suite (u_n) est décroissante (resp strictement décroissante) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ (resp $u_{n+1} < u_n$).
- Une suite (u_n) est constante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Définition

On dit qu'une suite est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante

Remarque : Toutes les suites ne sont pas monotones.
Par exemple la suite définie par $u_n = (-1)^n$, qui est la suite 1,-1,1,-1,1,-1,... n'est ni croissante, ni décroissante.

Méthodologie : Soit (u_n) une suite. Pour étudier son sens de variation, on peut, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- comparer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:
  - si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite est croissante.
  - si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite est décroissante.
- dans le cas où les u_n sont **strictement positifs**, comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.
  - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite est croissante.
  - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la suite est décroissante.

Théorème

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$, et (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$. Si f est monotone alors la suite (u_n) est monotone et de même monotonie

Remarque importante : la réciproque de ce théorème est fausse !

Définition

- On dit que la suite (u_n) est majorée par M si, pour tout n, $u_n \leq M$.
- On dit que la suite (u_n) est minorée par m si, pour tout n, $u_n \geq m$.
- On dit que la suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

II. Suites arithmétiques

A. Définition

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** si et seulement si il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a

$$u_n = u_p + (n-p) \times r$$

- En particulier, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier m et p on a :

$$u_m - u_p = (m-p)r$$

B. Propriété

Propriété **Variation d'une suite arithmétique**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. alors :

- (u_n) est croissante si $r > 0$.
- (u_n) est décroissante si $r < 0$.

Propriété **Représentation graphique d'une suite arithmétique**

Une suite arithmétique de raison r est représentée dans le plan par des points alignés sur une droite de coefficient directeur r.

Théorème **Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ on a :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Il est possible de résumé cette somme S par :

$$S = \text{Nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}}\text{ terme } + \text{ dernier terme}}{2}$$

III. Suites géométriques

A. Définition

Définition

Une suite (u_n) est dite **géométrique** si et seulement si il existe un réel q non nul tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n).

Théorème

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a
$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = u_0 \times q^n$$

B. Propriété

Propriété **Variations d'une suite géométrique**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q positive :

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Théorème **Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q différente de 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ on a :
$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Autrement dit :

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Pour ne pas perdre la main

Exercice 1

Précisez si les suites suivantes sont arithmétiques ou non. Si oui, donnez sa raison.

1. $u_n = n + 2$
2. $u_n = n^2 + 1$
3. $u_n = 5n + 3$
4. $u_n = \dfrac{n+2}{n}$
5. $u_n = -5n + +7$
6. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$
7. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n - 1 \end{cases}$
8. $u_n = \dfrac{5}{3}n - 1$
9. $u_n = 2^n$
10. $u_n = \dfrac{2n+1}{5}$
11. $u_n = \sqrt{n-1}$
12. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2 \end{cases}$

Exercice 2

Les suites (u_n) suivantes sont arithmétiques de raisons r. Exprimez u_n en fonction de n.

1. $u_0 = 2$ et $r = -2$
2. $u_1 = 61$ et $r = 4$
3. $u_5 = 3$ et $r = 2$
4. $u_0 = 0$ et $r = 1$
5. $u_0 = -3$ et $r = -\dfrac{1}{2}$
6. $u_1 = 5$ et $r = \dfrac{1}{10}$
7. $u_5 = -\dfrac{1}{3}$ et r$\dfrac{1}{2}$
8. $u_{10} = 0$ et $r = -3$

Exercice 3

Les suites (u_n) suivantes sont arithmétiques. Pour chacune d'elle déterminer la raison et le terme initial u_0.

1. $u_{20} = 10$ et $u_{34} = -18$
2. $u_{12} = 8$ et $u_4 = -12$
3. $u_2 + u_3 + u_4 = 36$ et $u_9 = 48$

Exercice 4

Les suites (u_n) sont arithmétiques de raison r.

1. $u_5 = 27$ et $u_{10} = 33$. Calculez u_{50}.
2. $u2000 = 74$ et $u_{2010} = 33$. Calculez u_{10000}.
3. $u_3 = \sqrt{2}$ et $u_8 = \sqrt{8}$. Calculez u_{10}.

Exercice 5

Calculer les sommes suivantes :

1. $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 25$
2. $S = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 15$
3. $S = 3 + 5 + 7 + \ldots + 35$
4. $S = 4 + 7 + 10 + \ldots + 31$
5. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=6} 8 + 2k$
6. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=10} 1 + 4k$

Exercice 6

Précisez si les suites suivantes sont géométriques ou non. Si oui, donnez sa raison.

1. $u_n = 3^{n+1}$
2. $u_n = n^2$
3. $u_n = 4^{n+1}$
4. $u_n = -5^{n+2}$
5. $u_n = \dfrac{2^{n+3}}{3^{n+2}}$
6. $u_n = 5^n - n$
7. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{2} \end{cases}$
8. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1} \end{cases}$

Exercice 7

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison q. Exprimer v_n en fonction de n et calculer v_{20}.

1. $v_1 = 1$ et $q = 3$
2. $v_5 = 2$ et $q = -1$
3. $v_{50} = 1024$ et $q = -2$

Exercice 8

Calculer les sommes suivantes

1. $S = 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^8$
2. $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{32768}$
3. $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \ldots - 177\,147$

Quelques problèmes types

Exercice 9

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n - \dfrac{1}{2n-1}$.

1. Pour n entier naturel, démontrer que
$$v_{n+1} - v_n = \frac{4n^2-3}{4n^2-1}$$
2. En déduire le sens de variation de (v_n).
3. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geqslant 1\,000$

Exercice 10

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$u_n = \frac{2^n}{n+1}$$
   (a) Calculez les 4 premiers termes de la suite (u_n)
   (b) Etudier le sens de variation de la suite (u_n)
2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} = v_n + n^2 + 1 \end{cases}$$
   (a) Calculer v_1, v_2 et v_3
   (b) Étudier le sens de variation de la suite (v_n)

Exercice 11

(u_n) est la suite définie par $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+1}$

1. À l'aide de la calculatrice, observer u_n pour des grandes valeurs de n
   Quelles conjectures peut-on faire sur la limite de (u_n) ?
2. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que
$$0 < u_n \leqslant 0,001$$
3. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que
$$0 < u_n \leqslant 10^{-p}$$
   avec p entier naturel.

Exercice 12

Au premier janvier 2010, Chloé débute dans une entreprise avec un salaire mensuel de 1 500 euros. Il est prévu dans son contrat une augmentation mensuelle de 7 euros à partir du deuxième mois.
On note $a_0 = 1\,500$ son salaire d'embauche, puis n supérieur ou égal à 1, a_n son salaire à la fin du $(n+1)^{\text{e}}$ mois.

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire la nature de la suite (a_n) et l'expression de a_n en fonction de n.
2. Déterminer le rang du premier mois où son salaire dépassera 2 000 €.
3. Quelle sera à cette date la somme totale perçue par Chloé depuis son embauche ?

Exercice 13

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20 % d'un jour sur l'autre à cause de la chaleur. Pour la journée du 1er juin, le débit D_0 est égal à 300 m^3 par jour.
On note D_n le débit pour le $n^{ième}$ jour après le 1er juin.

1. Calculer D_1, le débit pour le 2 juin.
2. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n, en déduire la nature de la suite (D_n) et l'expression de de D_n en fonction de n.
3. Calculer le volume apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin.

Exercice 14

Un capital $C_0 = 10\,000$ €est placé sur un compte rapportant un intérêt de 4 % par an. A la fin de chaque année un montant de 20 ? est prélevé par la banque pour frais de gestion. On nomme C_n le montant disponible sur le compte à la fin de la $n^{ième}$ année avant le prélèvement.

1. (a) Calculer C_1 puis C_2.
   (b) Justifier que $C_{n+1} = 1,04 \times C_n - 20,8$.
2. On pose $u_n = C_n - 520$ pour tout est $n \geqslant 0$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
   (b) Exprimer u_n puis C_n en fonction de n.
   (c) A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, déterminer au bout de combien d'années la capital initial aura doublé.