I. Trinôme du second degré

A. Mise sous forme canonique

Définition

On nomme fonction trinôme du second degré une fonction polynôme de degré 2, c'est à dire une fonction P, définie sur $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Propriété

Pour tout trinôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$, on peut trouver deux réels α et β tels que, pour tout réel x,

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Cette écriture est appelée **forme canonique** du trinôme.

B. Équation du second degré

Définition

On appelle équation du second degré à une inconnue toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, et c sont trois réels et $a \neq 0$.
Résoudre une telle équation équivaut à déterminer les racines du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Définition

On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ le nombre noté Δ défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Théorème

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, un trinôme du second degré et Δ son discriminant.

- Si $\Delta < 0$, alors P n'admet aucune racine **réelle** (l'équation $P(x) = 0$ n'a donc aucune solution réelle).
- Si $\Delta = 0$, alors P admet une seule et unique racine $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. P admet alors comme factorisation :
$$P(x) = a(x - x_0)^2$$
- Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
P admet alors comme factorisation :
$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

C. Signe d'un trinôme du second degré

Théorème

Soit P le trinôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, et c sont trois réels et $a \neq 0$. Soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ est du signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, alors $P(x)$ est du signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$ différent de $-\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, P admet deux racines x_1 et x_2, (et l'on supposera $x_1 < x_2$). $P(x)$ est du signe de a si et seulement si $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$.

II. Représentation graphique d'un trinôme du second degré

Définition

Soit P le trinôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, et c sont trois réels et $a \neq 0$.
Dans le plan muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe $\mathcal{C}_P$ représentative de P est une **parabole** d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
Son sommet S est le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$, où $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha) = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Théorème

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

- si $a > 0$ alors la fonction f possède les variations suivantes :

x	$-\infty$		$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

- si $a < 0$ alors la fonction f posséde les variations suivantes :

x	$-\infty$		$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Pour ne pas perdre la main

Exercice 1

Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par

$$f(x) = -3x^2 + 8x + 35$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
2. Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$

Exercice 2

Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par

$$f(x) = 11x^2 + 13x - 24$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
2. Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$

Exercice 3

Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 9$. Préciser son maximum.

Exercice 4

Déterminer une équation de la parabole qui coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-5; 0)$ et $(3; 0)$ et qui passe par le point $(4; 18)$.

Exercice 5

Déterminer une équation de la parabole $\mathcal{P}$ qui passe par le point $A(0; -3)$ et admet pour sommet $(-1; 4)$.

Exercice 6

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -3x^2 + 6x + 10$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -4x - 7$.
Déterminer les positions relatives de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

Savoir Faire

Exercice 7 Trouver la forme canonique de $ax^2+bx+c = f(x)$

Déterminer la forme canonique de $f(x)$:

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = -3x^2 - x + 5$
3. $f(x) = -x^2 + 2x + 9$
4. $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$
5. $f(x) = x^2 + 4x - 1$
6. $f(x) = -2x^2 + 6x + 10$

Exercice 8 Résoudre une équation du second degré

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ sans utiliser le discriminant.
   (a) $17x^2 - 8x = 0$
   (b) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $5x^2 + 11x - 16 = 0$
   (b) $-4x^2 + x - 9 = 0$

Exercice 9 Factoriser un trinôme du second degré

Écrire, lorsque c'est possible, $f(x)$ comme produit de deux facteurs du premier degré :

1. $f(x) = 2x^2 - 7x - 4$
2. $f(x) = -x^2 - x - 1$
3. $f(x) = -3x^2 + 7x + 6$
4. $f(x) = 4x^2 - 20x + 25$

Exercice 10 Signe de $ax^2 + bx + c = 0$

Établir le tableau de signe de $f(x)$ puis écrire l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée :

1. $f(x) = x^2 + x - 6, ;\ f(x) \geqslant 0$
2. $f(x) = -2x^2 + x + 1, ;\ f(x) > 0$
3. $f(x) = 2x^2 + 5x + 4, ;\ f(x) \leqslant 0$
4. $f(x) = 4x^2 + 28x + 49, ;\ f(x) \leqslant 0$
5. $f(x) = -3x^2 + 4x - 2, ;\ f(x) < 0$