I. Variations

A. Sens de variation

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est ***croissante*** sur I lorsque, pour tout réels a et b de I si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$. Ainsi **la croissance conserve l'ordre**.
- On dit que f est ***décroissante*** sur I lorsque, pour tout réels a et b de I si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$. Ainsi **la décroissance conserve l'ordre**.
- On dit que f est ***constante*** sur I lorsque, pour tout réels a et b de I si $a < b$ alors $f(a) = f(b)$.

Définition

On dit d'une fonction qu'elle est **monotone** sur un intervalle I lorsque son sens de variation ne change pas sur I

B. Extremums

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

La fonction f admet un maximum M sur I atteint en a si $\begin{cases} f(a) = M \\ \text{pour tout } x \text{ appartenant à } I, f(x) < f(a) \end{cases}$

On dit alors que la fonction f est majorée par M sur I.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

La fonction f admet un minimum m sur I atteint en b si $\begin{cases} f(b) = m \\ \text{pour tout } x \text{ appartenant à } I, f(x) > f(b) \end{cases}$ On dit alors que la fonction f est minorée par m sur I.

II. De nouvelles fonctions usuelles

A. Fonction racine carrée

Définition

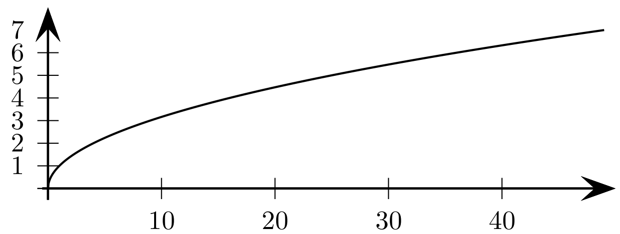
La fonction racine carrée est la fonction défine sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$, c'est à dire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Tableau de variations de la fonction racine carré :

x	0	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

Allure graphique :



B. Fonction valeur absolue

Définition **Valeur absolue d'un nombre réel**

Soit x un nombre réel. Sur une droite munie d'un repère normé $(O; I)$ on considère le point M d'abscisse x. On appelle **valeur absolue de x** la distance OM, que l'on note $|x|$.

Propriété

Soit x un nombre réel

- La valeur absolue de x est un nombre positif ou nul.
- Deux nombre opposés ont la même valeur absolue : $|-x| = |x|$
- Si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$ et si $x < 0$ alors $|x| = -x$

Définition

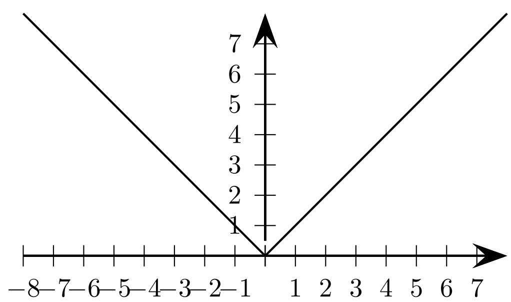
La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$, c'est à dire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

Tableau de variations de la fonction valeur absolue :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \|x\|$	$+\infty$ ↘	0 ↗	$+\infty$

Représentation graphique



III. Opérations et variations

A. Avec un réel

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.Soit k un nombre réel.
On définie sur I la fonction $f+kf$ par $(f+k)(x)=f(x)+k$.

Théorème

Les fonctions f et $f+k$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit λ un nombre réel.
On appelle produit de f par le réel λ la fonction notée λf définie sur I par $(\lambda f)(x)=\lambda \times f(x)$.

Théorème

- Si $\lambda \neq 0$, alors la fonction λf est monotone sur I :
  - de même sens que f si $\lambda > 0$
  - de sens contraire si $\lambda < 0$
- Si $\lambda = 0$, alors la fonction λf est constante nulle.

B. Avec deux fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur un **même intervalle** I.

Définition

on appelle somme de f et g la fonction notée $f+g$ définie sur I par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

Théorème

- Si f et g sont croissantes sur I, alors $f+g$ est croissante sur I.
- Si f et g sont décroissantes sur I, alors $f+g$ est décroissante sur I.

Définition

On appelle produit de f et g la fonction notée fg définie sur I par $(f \times g)(x)=f(x)\times g(x)$.

- Deux fonctions monotones dont le produit n'est pas monotone :
  $f(x) = x$ et $g(x) = x$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$, mais $fg(x) = x^2$ est décroissante puis croissante sur $\mathbb{R}$.
- Deux fonctions monotones dont la somme n'est pas monotone :
  $f(x) = x$ est monotone (croissante) sur $\mathbb{R}^+$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est monotone (décroissante) sur $\mathbb{R}^+$. Pourtant, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^+$: elle décroit, atteint un minimum en $x = 1$, puis croit.

C. Inverse et racine carrée d'une fonction

Définition

Soit u une fonction définie sur l'intervalle I telle que $u(x) \neq 0$.
La fonction qui, à tout x de l'intervalle I, associe $\dfrac{1}{u(x)}$ est notée $\dfrac{1}{u}$.
C'est la **fonction inverse** de u.

Propriété

Si $u(x)$ garde le même signe sur l'intervalle I avec $u(x) \neq 0$, alors la fonction u et $\dfrac{1}{u}$ ont des **sens de variations contraires** sur l'intervalle I.

Définition

Soit u une fonction définie sur l'intervalle I telle que $u(x) \geqslant 0$ sur I.
La fonction notée $\sqrt{u}$ est la fonction définie sur I, qui à tout x associe le réel $\sqrt{u(x)}$.

Propriété

Soit u une fonction définie sur l'intervalle I telle que $u(x) \geqslant 0$ pour tout x de l'intervalle I, alors les fonctions u $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I.

Pour ne pas perdre la main

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 - 3x + 4$$

1. Calculer $f(-3)$ et $f\left(\sqrt{3} - 3\right)$.
2. Déterminer les réels dont l'image par f vaut 4.

Exercice 2

Soit f une fonction telle que $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-9}$.
Sur quel ensemble la fonction f est-elle définie ?

Exercice 3

Soit p une fonction telle que $p(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$.
Sur quel ensemble la fonction p est-elle définie ?

Exercice 4

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $]-1;1[$ par

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1}$$

Ces fonctions sont-elles égales ?

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 8x$$

1. Écrire $f(x)$ sous sa forme canonique
2. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Donner un encadrement de $f(x)$ pour x tel que $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Exercice 6

1. Ecrire le résultat sans utiliser le symbole de la valeur absolue :
   (a) $|1 + \sqrt{3}|$
   (b) $|\pi - 3|$
   (c) $|1 - \sqrt{2}|$
2. Résoudre les équations suivantes
   (a) $|x| = 2$
   (b) $|x| = -3$
   (c) $|x| = 1$

Exercice 7

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x-4|$.

1. Calculer $g\left(\sqrt{5}\right)$
2. Exprimer $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue et représenter graphiquement la fonction g.
3. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 2$.
4. Résoudre algébriquement (c'est à dire par le calcul) l'équation $g(x) = 2$.

Exercice 8

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.

1. Donner les variations de u sur l'intervalle $[2;2]$.
2. En déduire les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ sur l'intervalle $[-2;2]$.

Exercice 9

Montrer que la fonction f définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ est croissante sur ce même intervalle.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$$

1. Déterminer son ensemble de définition
2. Montrer que la fonction f peut s'exprimer à l'aide de la fonction valeur absolue.

Exercice 11

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x - 4$.
   Donner le sens de variation de u sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]4;+\infty[$ par

   $$f(x) = 2 + \frac{5}{x-4}$$

   À l'aide de la question précédente, déterminer le sens de variation de la fonction f.