

I. Nombre dérivé et tangente

Définition Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre de I .

A tout nombre h non nul, tel que $a + h \in I$, on associe le nombre $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ appelé taux d'accroissement de f entre a et $a + h$.

Définition Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit a un nombre de I et h un réel non nul tel que $a + h \in I$.

Dire que f est dérivable en a , c'est dire que lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement tend vers un réel L .

Ce nombre L est appelé nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

Ainsi, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Vous avez vu en cours cette année que graphiquement le nombre dérivée en a correspondait à une position « limite » d'une droite passant par deux points, dont l'un d'abscisse a , de la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f : la tangente au point d'abscisse a . Ainsi, on a le résultat suivant :

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , \mathcal{C}_f sa courbe représentative et a un réel tel que $a \in I$.

Si f est dérivable en a alors la droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est la tangente à \mathcal{C}_f au point A .

Propriété

L'équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C}_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

II. Fonction dérivée et fonction de référence

Définition

On dit que f est **dérivable sur** I lorsque f admet en tout x de I un nombre dérivé, $f'(x)$.

Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de** f (ou plus simplement **dérivée de** f) la fonction, notée f' , qui, à tout x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x .

Théorème Tableau des dérivées usuelles

Fonction	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = k$ (fonction constante)	dérivable sur \mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$ sur \mathbb{R}	dérivable sur \mathbb{R}	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$ sur \mathbb{R}	dérivable sur \mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$ sur \mathbb{R}	dérivable sur \mathbb{R}	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^*	dérivable sur \mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur \mathbb{R}^+	dérivable sur \mathbb{R}_+^*	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Généralisation		
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sur \mathbb{R}	dérivable sur \mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ sur \mathbb{R}^*	dérivable sur \mathbb{R}^*	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$

III. Opérations sur les fonctions dérivables

On considère une fonction f définie sur un intervalle I ; Tous les résultats suivants sont **admis**.

u et v sont des fonctions définies et dérivables sur I	Si $f(x)$ s'écrit	alors f est dérivable sur I et $f'(x)$ est égale à
Somme $u + v$	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Différence $u - v$	$f(x) = u(x) - v(x)$	$f'(x) = u'(x) - v'(x)$
Produit par un nombre réel λu	$f(x) = \lambda u(x)$	$f'(x) = \lambda u'(x)$
Produit de deux fonctions $u.v$	$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
Inverse $\frac{1}{v(x)}$ où $v(x) \neq 0$ pour tout x de I	$f(x) = \frac{1}{v(x)}$	$f'(x) = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$
Quotient $\frac{u}{v}$ où $v(x) \neq 0$ pour tout x de I	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$

IV. Extremums et sens de variation

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si pour tout x de I :

- $f'(x) > 0$, alors f est croissante sur I .
- $f'(x) < 0$, alors f est décroissante sur I .
- $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Définition

- On dit qu'une fonction f admet un minimum local $f(a)$ lorsque pour tout x suffisamment proche de a , $f(x) \geq f(a)$.
- On dit qu'une fonction f admet un maximum local $f(b)$ lorsque pour tout x suffisamment proche de b , $f(x) \leq f(b)$.

Dans les deux cas, on parle d'extremum locaux, c'est à dire des valeurs minimales ou maximales de la fonction *localement*.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur I . Soit x_0 appartenant à I , distinct des extrémités de I .

- Si f a un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
- Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0 , alors f possède un extremum local en x_0 .

Pour ne pas perdre la main

Exercice 1

Calculer la fonction dérivée de la fonction u définie sur $]2; \infty[$ par :

$$u(x) = \frac{2x+1}{-x+2}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$$

Existe-t-il des réels a tels que $f'(a) = 2$?

Exercice 3

Déterminer les points de la courbe d'équation $y = \frac{4}{x}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 1$.

Exercice 4

Soit \mathcal{C} la représentation graphique de la fonction p définie sur \mathbb{R} par $p(x) = x^3 - 4x^2$.

Existe-t-il des points de \mathcal{C} où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ? Si oui, lesquels ?

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 3$.

Calculer sa dérivée et donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 1.

Exercice 6

Soit f et h les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x(1 + \sqrt{x}) \quad \text{et} \quad h(x) = (x + \sqrt{x})^2$$

Déterminer les fonctions f' et h' .

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^3 + 4x$.

1. Calculer la dérivée de f .
2. En déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^3 + 3x + 5$.

1. Calculer la dérivée de f .
2. En déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^3 + x^2$.

1. Calculer la dérivée de f .
2. En déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - x^2 + 1$.

1. Étudier le sens de variation de f sur \mathbb{R} .
2. Déterminer le minimum de f sur $[0; +\infty[$.
3. Déterminer le signe de f sur $[0; +\infty[$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

1. Étudier le sens de variation de f sur \mathbb{R} .
2. Existe-t-il des réels tels que $x^3 > 3x + 2$?

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

1. Étudier le sens de variation de f .
2. Déterminer le minimum de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 13

1. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$x^2 - \frac{1}{x}$$

2. Calculer $f(1)$
3. Déterminer le signe de f sur $]0; +\infty[$.
4. Existe-t-il des réels positifs tels que $x^2 \leq \frac{1}{x}$?

Exercice 14

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 - 3x - 1$$

1. Démontrer que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(a; f(a))$ est donnée par $y = (2a - 3)x - a^2 - 1$.
2. Existe-t-il un point pour lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
3. Existe-t-il un point pour lequel la tangente passe par l'origine du repère ?