Devoir de mathématiques n° 1 – ECS2 – travail de vacances

juillet - août 2017

Connaissances et savoir-faire incontournables

Ceci constitue un minimum de révisions à mener. Certaines connaissances sont du programme de lycée : il faut rattraper vos lacunes si vous en avez.

— La deuxième année est très courte, le rythme est très élevé. Préparez-vous !

— Plus vous aurez d'aisance, plus vos calculs seront assurés et rapides ... et plus vous réussirez !

Il est impératif, si ce n'est pas encore fait, de ficher le cours, en mettant dans un cahier spécifique les exercices-types, et les techniques et méthodes de calcul.

Pour trouver des exercices, vous avez tout le travail fait avec madame Oudet, et si vous souhaitez travailler sur un manuel, il y a par exemple le manuel Prépas Sciences ECS1 (ISBN : 9782340016460). Si vous achetez un livre, vérifiez bien que le programme est le « nouveau », mis en place à la rentrée 2013.

J'en profite pour vous donner mon adresse mail : `dsaudo@gmail.com`.

Analyse

1. **Savoir dériver efficacement** (une fois, deux fois, ... n fois.).
2. **Savoir primitiver, et savoir se vérifier mentalement en redérivant**, pour calculer des intégrales.
3. **Connaître ses courbes de fonctions usuelles** pour mémoriser mentalement la monotonie, les limites et valeurs remarquables, la convexité (exponentielle, logarithme, valeur absolue, racine, partie entière, monômes x^2, x^3, x^4, x^5, etc.). Accorder une importance particulière à cosinus, sinus et tangente, et la « nouvelle » fonction usuelle Arctan.
4. Connaître les croissances comparées pour les suites et pour les fonctions, que voici :

$$\text{pour } |q| > 1 \text{ et } \alpha \text{ réel,} \quad n^\alpha = o(q^n) \quad \text{et} \quad q^n = o(n!)$$

$$\text{pour } a,\, b,\, c \text{ réels strictement positifs,} \quad (\ln x)^a = o(x^b) \quad \text{et} \quad x^b = o(e^{cx})$$

5. Connaître les développements limités usuels (au voisinage de 0 : e^x, $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$).
6. Connaître la définition et les caractérisations d'une fonction convexe. Ficher les exercices-types du chapitre Convexité.
7. Connaître (et pratiquer !) ses formules de sommation :
   — pour des sommes finies avec la formule du binôme
   — pour des sommes de suites géométriques et arithmétiques
   — pour des sommes de séries géométriques et géométriques dérivées
   — pour des sommes de séries avec la série exponentielle.

8. Savoir mener la méthode d'étude pour une suite arithmético-géométrique ; pour une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Il faut ficher la méthode d'étude d'une suite arithmético-géométrique, et ficher 3 exemples (3 situations de cours différentes) d'étude de suite récurrente linéaire d'ordre 2.

9. Réviser ses formules de trigonométrie. Savoir linéariser des puissances de cosinus et sinus (exemples : exprimer $(\cos x)^2$, $(\sin x)^2$, $\cos x \sin x$, $(\cos x)^3$, etc. à l'aide de termes de la forme $\cos(nx)$, $\sin(px)$).

10. Avoir les idées claires sur les théorèmes d'analyse :
    — Théorème de la bijection (complet ! y compris les informations sur f^{-1}).
    — Théorème des valeurs intermédiaires (lister les différences entre ce théorème et le précédent).
    — Théorème de dérivation des fonctions réciproques.
    — Théorème de Rolle.
    — Égalité des accroissements finis.
    — Inégalité des accroissements finis (deux versions).
    — Nous reverrons ensemble les formules de Taylor.
11. Savoir effectuer un changement de variables pour le calcul d'une intégrale sur un segment (pour les intégrales impropres, nous aurons en deuxième année un théorème plus performant). Refaire des intégrations par parties.

Algèbre

1. Savoir poser la division euclidienne d'un polynôme par un polynôme $B \neq 0$. Si vous ne savez plus faire, regardez par exemple www.youtube.com/watch?v=dLN4sqe9l00. Refaites des calculs sur ce thème.
2. Réviser, en refaisant les systèmes du polycopié de cours, la méthode du pivot. En application, savoir déterminer l'inverse d'une matrice concrète (d'ordre 3 ou 4 ou 5) par la méthode de Cramer. Quand la matrice est d'ordre 2, comment procède-t-on ?
3. Savoir montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :
   — par les 3 points,
   — en montrant qu'il s'agit d'un espace vectoriel engendré.
   Peut-on toujours faire les deux méthodes ? Comment choisir quelle méthode appliquer ?
4. Savoir démontrer qu'une application linéaire est linéaire, est un endomorphisme.
5. Pour f application linéaire de matrice A, **savoir déterminer le rang de f, le noyau de f et l'image de f à l'aide de A.**

Probabilités

1. **Maîtriser la formule des probabilités totales !**
   Dans toutes les situations : deux événements, n événements, une infinité dénombrable d'événements... concrète et aussi théorique ... !
2. Connaître ses formules de probabilités : additivité, $P(\overline{A})$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup B \cup C)$, formule des probabilités composées, théorème de la limite monotone et ses corollaires.
3. **Maîtriser le théorème du transfert** dans toutes les situations (concrètes, théoriques).
4. Savoir refaire, cahier fermé et rapidement, les calculs d'espérance et variance pour toutes les lois usuelles, discrètes ou à densité qui figurent dans votre cours.
5. Réviser toutes les caractéristiques des lois usuelles : définition, modèle qu'on peut éventuellement reconnaître, espérance, éventuellement variance.
6. Ficher des exercices sur les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$.
7. Définition et propriétés de la fonction de répartition de X :
   — si X est discrète
   — si X est à densité.
   Ficher des exercices faisant intervenir des fonctions de répartition.

Maths et Scilab

1. Commandes particulières du chapitre Matrices.
2. Commandes particulières du chapitre Variables aléatoires.
3. Réviser les sommes de Riemann *(Intégration sur un segment)* et savoir programmer leur calcul (n étant donné).
4. Savoir programmer le calcul des termes d'une suite.
5. Ficher un exercice : suite + inégalité des accroissements finis + Scilab.

Généralités

Sur l'usage des signes ⇒ et ⇔ : vidéo de Gilles Bailly Maître (langage mathématiques épisode 3) www.youtube.com/watch?v=zdW1Nqsg040 de 1min04 à l'exercice compris ; de 9min15 à 10min10 (en écoutant bien 9min34) ; et enfin l'exercice en 14min.

> La plupart d'entre vous croient que « ⇒ » est un raccourci de « donc », et que « ⇔ » est un raccourci de « soit encore », ou « ce qui équivaut à ». C'est faux !
> L'usage des signes ⇒ et ⇔ doit être rarissime dans vos copies, et vous pouvez arrêter d'utiliser ces signes si vous avez peur de vous tromper. On les utilise seulement quand on étudie les rapports de véracité entre des propositions, pas devant des faits avérés !

Soit $x \in [0,1]$.
$0 \leq x^2 \leq 1$
$\cancel{\Rightarrow} \; e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$
$\cancel{\Rightarrow} \; \ln(e^{-x^2}+1) \leq \ln 2$
On sait que $x \in [0,1]$. Les deux lignes suivantes sont avérées, déductions de la première ligne $0 \leq x^2 \leq 1$.
Il faut écrire :
Soit $x \in [0,1]$.
On a $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$,
et donc $\ln(e^{-x^2}+1) \leq \ln 2$.

Exercices-types : énoncés

Il faut travailler les exercices suivants : les comprendre, les apprendre et retenir la façon de faire sur le long terme. La rédaction doit être impeccable.

Thème 1 : factorisation concrète d'un polynôme

Pour que la question vous soit posée, le polynôme en jeu doit posséder des racines dites « évidentes » (0, 1, -1, 2 ou -2, ou encore une racine donnée dans l'énoncé).
Factoriser $P(X) = X^4 + 5X^3 + 8X^2 - 2X - 12$.

Thème 2 : continuité-dérivabilité d'une fonction définie par morceaux (puis étude pour s'entraîner)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x(1-(\ln x)^2) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition de f. On note I ce domaine.
2. Étudier la continuité de f sur I.
3. Étudier la dérivabilité de f sur I.
4. Étudier les variations de f.
5. Étudier la convexité de f et montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion, qu'on déterminera.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (quelles sont les attentes du correcteur ?).
7. Tracer la courbe représentative de f avec Scilab, et vérifier les résultats de la question précédente.
8. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a :

$$\forall x > 0, f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2\,n!}{x^{n+1}} \left(\ln x - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \right)$$

Thème 3 : fonction définie par une intégrale avec la variable présente uniquement dans les bornes de l'intégrale

Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et calculer $f'(x)$ pour x réel, où :

$$f(x) = \int_{1-x}^{(1-x)^2} \frac{1}{1+t^4} \,\mathrm{d}t$$

Thème 4 : une étude de suite d'intégrales (I_n)

Pour $n \in \mathbf{N}$, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que la suite (I_n) est bien définie.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $I_n \geqslant 0$.
3. Étudier la monotonie de la suite (I_n).
4. Montrer que la suite (I_n) est convergente.
5. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
6. Déterminer la limite de la suite (I_n).

Thème 5 : un cas particulier pour montrer qu'une famille est une base

n désigne un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $(1, X+1, (X+2)^2, \ldots, (X+n)^n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercices-types : corrigés

Thème 1 : factorisation concrète d'un polynôme

Pour que la question vous soit posée, le polynôme en jeu doit posséder des racines dites « évidentes » (0, 1, -1, 2 ou -2, ou encore une racine donnée dans l'énoncé).

> • Je cherche une racine évidente a de P. $X - a$ divise P.
> Si $P(a) = P'(a) = 0$, alors $(X - a)^2$ divise P.
> Si $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$, alors $(X - a)^3$ divise P, etc.
>
> • Mettons qu'on ait trouvé que $(X - a)^2$ divisait P. Je pose la division euclidienne de P par $X^2 - 2aX + a^2$ et je trouve le quotient Q tel que $P(X) = (X - a)^2 Q(X)$.
>
> • Si Q est de degré inférieur ou égal à 2, on a une méthode pour trouver ses racines et le factoriser. Si Q est de degré supérieur ou égal à 3, on recherche une racine évidente pour Q, et on recommence ...

Factorisons $P(X) = X^4 + 5X^3 + 8X^2 - 2X - 12$. On remarque que $P(1) = 0$.
$P'(X) = 4X^3 + 15X^2 + 16X - 2$ et $P'(1) \neq 0$.
$X - 1$ divise P, mais $(X - 1)^2$ ne divise pas P. On pose la division euclidienne suivante :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +5X^3 & +8X^2 & -2X & -12 & X-1 \\ \cline{6-6}
-X^4 & +X^3 & & & & X^3+6X^2+14X+12 \\ \cline{1-2}
 & 6X^3 & +8X^2 & & & \\
 & -6X^3 & +6X^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 14X^2 & -2X & & \\
 & & -14X^2 & +14X & & \\ \cline{3-4}
 & & & 12X & -12 & \\
 & & & -12X & +12 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$P(X) = (\underbrace{X^3 + 6X^2 + 14X + 12}_{Q(X)})(X - 1)$ et on remarque que -2 est racine de Q.
$Q'(X) = 3X^2 + 12X + 14$ et $Q'(-2) \neq 0$. On pose la la division euclidienne suivante :

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +6X^2 & +14X & +12 & X+2 \\ \cline{5-5}
-X^3 & -2X^2 & & & X^2+4X+6 \\ \cline{1-2}
 & 4X^2 & +14X & & \\
 & -4X^2 & -8X & & \\ \cline{2-3}
 & & 6X & +12 & \\
 & & -6X & -12 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

À ce stade, $P(X) = (X - 1)(X + 2)(X^2 + 4X + 6)$. On termine avec la méthode du discrimant (je vous laisse mener les calculs ; le discriminant étant $-8 = (2\sqrt{2}\,i)^2$).

$$\boxed{P(X) = (X - 1)(X + 2)(X - (2 + \sqrt{2}\,i))(X - (2 - \sqrt{2}\,i))}$$

Thème 2 : continuité-dérivabilité d'une fonction définie par morceaux (puis étude pour s'entraîner)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x(1 - (\ln x)^2) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. $x(1 - (\ln x)^2)$ existe ssi $\ln x$ existe ssi $x > 0$. Par ailleurs, $f(0)$ est donné.
   Le domaine de définition de f est donc $I = [0, +\infty[$.
2. Pour étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux :

- on rédige la continuité sur des intervalles ouverts à l'aide de fonctions de référence, de notre cours ;
- l'étude de la continuité aux points de raccord se fait à part, en revenant à la définition

$$f \text{ est continue en } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Ici, les fonctions ln et $x \mapsto x$ sont continues sur $]0,+\infty[$ donc par produit, la fonction $f : x \mapsto x(1-\ln x \times \ln x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
Par limite de cours, $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2 = 0$. Comme $f(x) = x - x(\ln x)^2$, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et f est continue en 0.
$\boxed{f \text{ est continue sur } I.}$

3. Pour étudier la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux :

- on rédige la dérivabilité sur des intervalles ouverts à l'aide de fonctions de référence, de notre cours ;
- l'étude de la dérivabilité aux points de raccord se fait à part, en revenant à la définition

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \text{ le taux d'accroissement } \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ admet une limite finie}$$

$$\text{quand } x \text{ tend vers } a$$

Dans le cas où le taux d'accroissement admet une limite finie, cette limite finie est $f'(a)$.

Ici, les fonctions ln et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc par produit, la fonction $f : x \mapsto x(1-\ln x \times \ln x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Le taux d'accroissement en 0 est :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1-(\ln x)^2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$$

f n'est pas dérivable en 0. La courbe représentative de f admet une tangente verticale en 0.

4. Pour $x > 0$, $f'(x) = 1-(\ln x)^2 - 2\ln x$. Cherchons le signe de $f'(x)$.
- Première méthode : une astuce ...

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2-(1+\ln x)^2 \\ &= (\sqrt{2}+1+\ln x)(\sqrt{2}-1-\ln x) \quad \text{identité remarquable } a^2-b^2=(a-b)(a+b) \end{aligned}$$

S'agissant d'un produit, on peut dresser un tableau de signes.

- Deuxième méthode : utilisation d'un polynôme du second degré.

$P(X) = 1-X^2-2X$ a pour discriminant $\Delta = 8$ et P admet deux racines : $\frac{2\pm\sqrt{8}}{-2} = -1\pm\sqrt{2}$. Ce qui nous donne la factorisation

$$P(X) = -(X-(-1-\sqrt{2}))(X-(-1+\sqrt{2})) = (X+\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1-X)$$

On retrouve : $f'(x) = (\sqrt{2}+1+\ln x)(\sqrt{2}-1-\ln x)$.

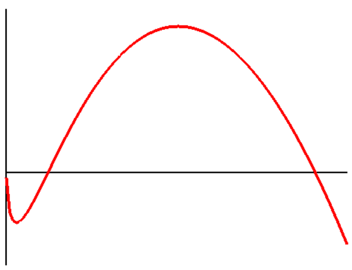
x	0		$e^{-\sqrt{2}-1}$		$e^{\sqrt{2}-1}$		$+\infty$
Signe de $\sqrt{2}+1+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\sqrt{2}-1-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	0		$e^{-\sqrt{2}-1}$		$e^{\sqrt{2}-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	v	$\nearrow$	w	$\searrow$	$-\infty$

$$\begin{array}{rcl} \text{en } x = e^{-\sqrt{2}-1}\text{, on a } \ln x & = & -\sqrt{2}-1 \\ 1-(\ln x)^2 & = & -2(1+\sqrt{2}) \\ v & = & -2(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}-1} \\ \text{en } x = e^{\sqrt{2}-1}\text{, on a } \ln x & = & \sqrt{2}-1 \\ 1-(\ln x)^2 & = & 2(\sqrt{2}-1) \\ w & = & 2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}-1} > 0 \end{array}$$

5. f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, et pour $x>0$, $f''(x) = -\frac{2}{x}(\ln x + 1)$.
   Pour $x \in]0, e^{-1}[$, $f''(x) > 0$; $f''(e^{-1}) = 0$; pour $x > e^{-1}$, $f''(x) < 0$. f est convexe sur $]0, e^{-1}]$, concave sur $[e^{-1}, +\infty[$, et la courbe représentative de f admet un point d'inflexion en $(e^{-1}, f(e^{-1})) = (e^{-1}, 0)$.
6. Les attentes du correcteur : le respect des variations et la convexité ; deux tangentes horizontales et une tangente verticale.
7. Par exemple :

```
x = linspace(0.001,3,100)
y = x .* (1-(log(x)).^2)
plot2d(x,y,style=5)
```



8. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$\text{« } \forall x>0,\ f^{(n+2)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2\,n!}{x^{n+1}}\left(\ln x - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}\right) \text{ »}$$

qu'on montre par récurrence pour $n \geqslant 2$.

> Il est obligatoire d'énoncer sur la copie la propriété, entre guillemets, en faisant bien attention à avoir mis une propriété $\mathcal{P}_n$ relative au rang précis n.
> Des formulations du genre $\mathcal{F}_n$: « (u_n) est croissante » ne conviennent pas. Ici $\mathcal{F}_n$ est synonyme de « la suite u est croissante », et vous voyez bien que cela n'est relatif à aucun rang n.

• Pour $x>0$, on a vu au 5. que $f''(x) = -\frac{2}{x}(\ln x + 1)$. Pour $x>0$, on a (je dérive à chaque fois comme un produit, c'est plus efficace !) :

$$\begin{array}{rcl} f^{(3)}(x) & = & \frac{2}{x^2}(\ln x + 1) - \frac{2}{x}.\frac{1}{x} = \frac{2}{x^2}\ln x \\ f^{(4)}(x) & = & -\frac{4}{x^3}\ln x + \frac{2}{x^3} = -\frac{4}{x^3}(\ln x - \frac{1}{2}) \end{array}$$

Par ailleurs, $(-1)^{2+1}\dfrac{2\times 2!}{x^{2+1}}\left(\ln x-\sum\limits_{p=2}^{2}\dfrac{1}{p}\right)=-\frac{4}{x^3}(\ln x-\frac{1}{2})$. Donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

- Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier $n\geqslant 2$.

Pour obtenir $f^{(n+3)}$, on dérive $f^{(n+2)}$. Là encore, je dérive comme un produit.

$$\begin{aligned}
f^{(n+2)}(x) &= (-1)^{n+1}\frac{2\,n!}{x^{n+1}}\left(\ln x-\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}\right)\\
f^{(n+3)}(x) &= (-1)^{n+1}2\,n!\left(-\frac{(n+1)}{x^{n+2}}(\ln x-\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p})+\frac{1}{x^{n+1}}.\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+2}2\,(n+1)!}{x^{n+2}}\left(\ln x-\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+2}2\,(n+1)!}{x^{n+2}}\left(\ln x-\sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

Pour tout $n\geqslant 2$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Thème 3 : fonction définie par une intégrale avec la variable présente uniquement dans les bornes de l'intégrale

Remarques préliminaires :
On appelle **intégrande** (nom masculin) la fonction sous le signe intégral.

Pour x réel, on considère ici $f(x)=\int\limits_{1-x}^{(1-x)^2}\dfrac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

L'intégrande est la fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t^4}$. Pour chaque réel x fixé, l'intégrande est **continu** sur le **segment** qui relie $1-x$ à $(1-x)^2$. L'intégrale $f(x)$ est alors bien définie (cadre de cours : intégrale d'une fonction continue sur un segment). L'intégrale $f(x)$ est un **réel**.
Ainsi, à tout réel x, on associe le réel $f(x)$. On a alors défini une **fonction**. C'est une « fonction définie par une intégrale ». Il importe de regarder la place de la variable. Ici x est dans les bornes de l'intégrale.

Retour à l'exercice.
La fonction $g : t\mapsto\frac{1}{1+t^4}$ est continue sur $\mathbf{R}$. Elle admet une primitive G sur $\mathbf{R}$; G est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ (primitive d'une fonction continue). Par le théorème fondentamental de l'intégration :

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad f(x)=G((1-x)^2)-G(1-x)$$

La fonction $x\mapsto(1-x)^2$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, là où G est de classe C^1. La fonction composée $x\mapsto G((1-x)^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. Avec la même rédaction, la fonction $x\mapsto G(1-x)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

Nous dérivons avec la formule de dérivation d'une composée : $(w\circ u)'=u'\times w'(u)$.

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbf{R},\quad f'(x) &= -2(1-x)G'((1-x)^2)-(-1)G'(1-x)=2(x-1)g((1-x)^2)+g(1-x)\\
&= \frac{2(x-1)}{1+(1-x)^8}+\frac{1}{1+(1-x)^4}
\end{aligned}$$

Thème 4 : une étude de suite d'intégrales (I_n)

Pour $n\in\mathbf{N}$, on considère $I_n=\displaystyle\int\limits_0^1 x^ne^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que la suite (I_n) est bien définie, c'est expliquer que l'intégrale existe, et pour cela, on doit se référer à un cadre d'intégration au programme.
   Soit $n\in\mathbf{N}$. La fonction $x\mapsto x^ne^{-x^2}$ est **continue** sur le **segment** $[0,1]$. Nous sommes dans le cadre d'intégration d'une fonction continue sur un segment : I_n existe.
   $\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bien définie.}}$
2.

> Pour étudier le signe d'une intégrale, on étudie le signe de l'intégrande et on utilise la propriété de « positivité » de l'intégrale.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^n e^{-x^2} \geqslant 0$. Par « positivité » de l'intégrale (on intègre bien dans l'ordre croissant des bornes), $I_n \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a } I_n \geqslant 0.}$

3. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (x^{n+1} e^{-x^2} - x^n e^{-x^2})\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n (x-1) e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Pour $x \in [0,1]$, on a $x^n \geqslant 0$, $e^{-x^2} \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$, puis $x^n(x-1)e^{-x^2} \leqslant 0$. Par « positivité » de l'intégrale (on intègre bien dans l'ordre croissant des bornes), $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$

4. La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0). Par le théorème de convergence monotone, cette suite converge.

$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est convergente.}}$

5.

> Pour encadrer une intégrale, on encadre l'intégrande et on utilise la propriété de « croissance » de l'intégrale.
> Si on cherche un encadrement fonction de n, on fait bien attention à ne pas perdre n en cours de route ...

Pour $x \in [0,1]$, on a successivement :

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant x^2 \leqslant & 1 \\ -1 & \leqslant -x^2 \leqslant & 0 \\ 0 \leqslant e^{-1} & \leqslant e^{-x^2} \leqslant & 1 \\ & & \text{on multiplie par } x^n \text{ positif} \\ & x^n e^{-x^2} \leqslant & x^n \end{array}$$

Par « croissance de l'intégrale », $\quad I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$. Comme $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, on a $I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a } I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.}$

6. Reprenons l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim I_n = 0}$.

Thème 5 : un cas particulier pour montrer qu'une famille est une base

Montrons que la famille $\mathcal{F} = (1, X+1, (X+2)^2, \ldots, (X+n)^n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

• La famille $\mathcal{F}$ est constituée de polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$ (c'est-à-dire de polynômes de degré au plus n).
• La famille $\mathcal{F}$ est constituée de polynômes non nuls de degrés tous différents donc (cours !) $\mathcal{F}$ est une famille libre.
• La famille libre $\mathcal{F}$ est constituée de $n+1$ polynômes et $\dim \mathbf{R}_n[X] = n+1$. Par propriété, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Devoir, facultatif mais conseillé, pour le jour de la rentrée

Rien de sert de recopier sur des camarades ou sur des corrigés.
Appropriez-vous les notions pour les retenir sur le long terme, jusqu'aux concours.
Réfléchissez à ce que vous écrivez.

exercice 1

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n e^x}{n!}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\lim I_n = 0$.
2. Montrer que $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire que $e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Quel résultat du cours est ici démontré ?

exercice 2

Soit n un entier naturel. On se propose de déterminer l'ensemble des polynômes $P(X)$ à coefficients réels tels que :

$$P(X) + P(X+1) = 2X^n \tag{1}$$

1. Soit Φ l'application qui à tout élément $Q(X)$ de $\mathbf{R}[X]$ associe le polynôme :

$$\Phi[Q(X)] = Q(X) + Q(X+1)$$

   (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

   (b) p étant un entier naturel, on note Φ_p la restriction de Φ à $\mathbf{R}_p[X]$.

      i. Montrer que Φ_p est un endomorphisme de $\mathbf{R}_p[X]$.

      ii. On note $B_p = (1, X, \ldots, X^p)$ la base canonique de $\mathbf{R}_p[X]$. Donner la matrice de Φ_p dans la base canonique B_p. Montrer que cette matrice est une matrice triangulaire supérieure inversible.

      iii. En déduire que Φ_p est un automorphisme de $\mathbf{R}_p[X]$.

   (c) Prouver que Φ est un automorphisme de $\mathbf{R}[X]$ et en déduire qu'il existe un unique polynôme de $\mathbf{R}[X]$, noté E_n, vérifiant la relation (1). Préciser le degré de E_n.

2. On pose $E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k$.

   (a) Vérifier que $E_n(X+1) + E_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k} \right] X^j$.

   (b) En déduire le système dont les $a_{n,k}$ sont solutions et préciser la valeur de $a_{n,n}$.

   (c) Déterminer $E_0(X)$, $E_1(X)$, $E_2(X)$.

   (d) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $E_n'(X) = nE_{n-1}(X)$ puis en déduire l'expression de $E_n^{(k)}(X)$ (dérivée k-ième de $E_n(X)$).

   (e) Montrer que $E_n(X) = (-1)^n E_n(1-X)$ et en déduire pour n pair strictement positif la valeur de $E_n(0)$ et $E_n(1)$ ainsi que pour n impair la valeur de $E_n(\frac{1}{2})$.

   (f) Déterminer $E_3(X)$ et $E_4(X)$.

exercice 3

On considère deux jetons J_1 et J_2 équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).

— Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1.
— Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.

Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.

On note E l'événement « le jeton J_1 est choisi pour le jeu » et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement « le k^{e} lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».

Partie 1 : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve.

1. (a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbf{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
   (b) On suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbf{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
   Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ?

2. Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
   On considère également la variable aléatoire Y égale au rang de la première face portant le numéro 1 et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.
   On suppose ces variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (a) Calculer, pour n entier naturel non nul, $P(X = n)$.
   (b) En déduire que $P(X = 0) = \frac{1}{2}$. Retrouver ce résultat par une autre méthode.
   (c) Montrer que X admet une espérance puis déterminer $E(X)$.
   (d) Montrer que $X(X-1)$ admet une espérance, la déterminer, puis vérifier que $V(X) = 2$.

3. (a) Calculer, pour n entier naturel non nul, la probabilité $P(Y = n)$.
   (b) En déduire que $P(Y = 0) = 0$.
   (c) Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.
   (d) Montrer que $Y(Y-1)$ admet une espérance, la déterminer, puis vérifier que $V(Y) = \dfrac{5}{4}$.

4. On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire S par : $\forall \omega \in \Omega$, $S(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega))$.
   (a) Déterminer $S(\Omega)$.
   (b) Montrer que $P(S = 1) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$.
   (c) Pour n entier supérieur ou égal à 2, comparer d'une part $[X = n]$ et $[Y < n]$, et d'autre part $[Y = n]$ et $[X < n]$, puis en déduire que $[S = n] = [X = n] \cup [Y = n]$.
   (d) Reconnaître alors la loi de S et préciser son espérance et sa variance.

5. On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire I par : $\forall \omega \in \Omega$, $I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.
   (a) Montrer que I est une variable de Bernoulli.
   (b) Déterminer $P(I = 0)$, puis donner la loi de I, ainsi que son espérance et sa variance.

Partie 2 : simulation des variables X et Y

1. On considère le programme suivant :

```
X = 0
jeton = rand()
if jeton > 1/2 then
    X = X+1
    lancer = rand()
    while lancer < 1/2
        X = X+1
        lancer = rand()
    end
end
disp(X)
```

(a) Expliquer le fonctionnement de ce programme et déterminer quel est le contenu de la variable affichée à la fin.

(b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle `while` est fini ?

2. Écrire un programme qui donne la valeur de la variable aléatoire Y.