Correction ou éléments de correction des exercices de vacances

Exercice 1

1. f_n est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, $f_n'(x) = 5x^4 + n$ donc $f_n'(x)$ est la somme de deux termes positifs (car la puissance de x est pair) dont un strictement car n est un entier naturel non nul donc f_n' et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$) (elle est donc injective...)
2. f_n est strictement croissante et continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection continue, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle (car f_n est continue et $\mathbb{R}$ est un intervalle) de même nature que $\mathbb{R}$ et dont les bornes sont les limites de f_n aux bornes de $\mathbb{R}$.

   Comme f_n est un polynôme, elle a la même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son terme de plus haut degré ...donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, tout réel, en particulier 0, admet donc un unique antécédent par f_n dans $\mathbb{R}$. Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la note u_n.

   De plus, $f_n(0) = -1$ donc $0 > f_n(0)$ et comme f_n^{-1} a les mêmes monotonies que f_n, $u_n > 0$.
3. la différence vaut x donc est positive pour tout x positif.

   Comme pour tout entier naturel n non nul, u_n est positif, on a $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \geqslant 0$.

   Comme pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 0$, $f_{n+1}(u_n) \geqslant 0$ puis $f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$. comme f_{n+1}^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la suite u est décroissante.

   Comme elle est décroissante et minorée par 0, elle converge.
4. on compare les images des deux réels : $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^5} \geqslant 0$. Donc comme la bijection réciporque de f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\frac{1}{n} \geqslant u_n \geqslant 0$ pour tout n naturel non nul. D'après le théorème des gendarmes, comme u est encadrée par deux suites tendant vers 0, u converge et sa limite vaut 0.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = (u_n)^5 + nu_n - 1$ donc $nu_n = 1 - (u_n)^5$. Comme u converge vers 0, il en est de même pour u^5. Par différence, $(nu_n))$ converge vers 1 donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.
6. $\frac{1}{n} - u_n = \frac{(u_n)^5}{n} \sim \frac{(\frac{1}{n})^5}{n}$ d'après les régles sur les équivalents.

   Donc $\frac{1}{n} - u_n \sim \frac{1}{n^6}$.

Exercice 3 : a été donné en devoir surveillé.

Exercice 8 (EMLyon 94)

1. Quand $\mathrm{N} = n$, X est alors le nombre de colis qui arrivent déteriorés parmi n colis envoyés indéopendamment les uns des autres et avec la même probabiltié $0,1$. Donc la loi de X quand $\mathrm{N} = n$ est une loi binômiale de paramètres n et $0,1$.

   Donc $p_{\mathrm{N}=n}(\mathrm{X} = k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) 0,1^k 0,9^{n-k} si\ 0 \leq k \leq n$ et 0 sinon.
2. Comme $(\mathrm{N} = n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, alors la série $\sum_{n \geq 0} p(\mathrm{X} = k/\mathrm{N} = n)\, p(\mathrm{N} = n)$ est convergente et sa somme est $p(\mathrm{X} = k)$ d'après la formule des probabilités totales. On en calcule la somme partielle en tenant compte des deux formules possibles pour la probabilité :.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{M} p_{N=n}(X=k)\,p(N=n) &= \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1}}_{n<k} p_{N=n}(X=k)\,p(N=n) + \underbrace{\sum_{n=k}^{M}}_{n\geq k} p_{N=n}(X=k)\,p(N=n) \\
&= 0 + \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} 0,1^k 0,9^{n-k} e^{-5}\frac{5^n}{n!} \text{ avec } n \geq k : \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= 0,1^k e^{-5} \sum_{n=k}^{M} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} 0,9^{n-k}\frac{5^n}{n!} = \frac{0,1^k e^{-5} 0,9^{-k}}{k!} \sum_{n=k}^{M} \frac{0,9^n 5^n}{(n-k)!} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-5}}{k!} \sum_{i=0}^{M-k} \frac{4,5^{i+k}}{i!} = \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-5} 4,5^k}{k!} \sum_{i=0}^{M-k} \frac{4,5^i}{i!} \\
&\underset{M\to+\infty}{\to} \frac{\left(\frac{4,5}{9}\right)^k e^{-5} e^{4,5}}{k!} = \frac{0,5^k e^{-0,5}}{k!}
\end{aligned}$$

Donc X suit une loi de Poisson de paramètre 0,5

3. On admet que la loi de Y est une loi de Poisson de Paramètre 4,5.
   Soient i et $j \in \mathbb{N}$.
   (a) Comme on ne pense pas que X et Y sont indépendants, il faudra conditionner. Mais on ne connait la probabilité qu'en conditonnant par la valeur de N. On réécrit donc $(X = i \cap Y = j) = (X = i \cap N = j+i)$. D'où

$$\begin{aligned}
p(X=i\cap Y=j) &= p(X=i\cap N=i+j) = p(X=i/N=i+j)\cdot p(N=i+j) \\
&= C_{i+j}^{i} 0,1^i 0,9^{i+j-i}\cdot e^{-5}\frac{5^{i+j}}{(i+j)!} \\
&= \frac{(i+j)!}{i!\cdot j!} 0,1^i\cdot 5^i \cdot 0,9^j\cdot 5^j\cdot e^{-5}\frac{1}{(i+j)!} \\
&= \frac{0,5^i\cdot 0,45^{j\,j}}{i!\cdot j!}\cdot e^{-5}
\end{aligned}$$

   (b) Or

$$p(X=i)\cdot(Y=j) = \frac{0,5^i}{i!}\cdot e^{-0,5}\frac{0,45^j}{j!}\cdot e^{-0,45} = p(X=i\cap Y=j)$$

   Donc, contre toute attente (puisque les colis intacts ne sont pas endommagés...) X et Y sont indépendantes. Ceci s'explique par le fait que le nombre total de colis n'est pas connu. Donc le fait de connaitre le nombre de ceux endommagés ne permet pas de déduire le nombre de ceux intacts.

Exercice 9

1. Pour déterminer la loi de X_2, il faut trouver l'ensemble des valeurs prises par cette variable et les probabilités correspondantes. Si n=2, cela signifie que l'on fait deux tirages. Le nombre de boules blanches tirées peut donc être 0,1 ou 2.
   $P(X_2 = 0)$=P(On a tiré deux boules rouges).
   On note B_i l'évènement "‘on a obtenu une boule blanche au iéme tirage".
   On a alors $P(X_2 = 0) = P(\bar{B_1} \cap \bar{B_2}) = P(\bar{B_1})P_{\bar{B_1}}(\bar{B_2})$ d'après la formule des probabilités composées.
   Or $P(\bar{B_1}) = \dfrac{1}{2}$ car l'univers constitué des deux boules contenues initialement dans l'urne peut être muni de la probabilité uniforme (les boules sont choisies au hasard et indiscernables au toucher).
   $P_{\bar{B_1}}(\bar{B_2})$ désigne la probabilité de tirer une boule rouge auu deuxième tirage sachant que l'on a tiré une boule rouge au premier. Avant le deuxième tirage, l'urne contient donc une boule blanche et deux rouges d'où $P_{\bar{B_1}}(\bar{B_2}) = \dfrac{2}{3}$.
   D'où $P(X_2 = 0) = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

En raisonnant de façon analogue (faites le !), on montre que $P(X_2 = 2) = \frac{1}{3}$.

On a alors $P(X_2 = 1) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

X_2 suit donc la loi uniforme sur 0,1,2.

L'espérance de X_2 est donc 1 et la variance : $\frac{2}{3}$.

2. Loi de X_3

   (a) Avec les mêmes notations que pour la question précédentes, $P(X_3 = 0) = P(\bar{B_1} \cap \bar{B_2} \cap \bar{B_3})$.

   $P(X_3 = 0) = P(\bar{B_1}) \times P_{\bar{B_1}}(\bar{B_2}) \times P_{\bar{B_1} \cap \bar{B_2}}(\bar{B_3})$, d'après la formule des probabilités composées.

   $P_{\bar{B_1}} = \frac{1}{2}, P_{\bar{B_1}}(\bar{B_2}) = \frac{2}{3}$ et $P_{\bar{B_1} \cap \bar{B_2}}(\bar{B_3}) = \frac{3}{4}$ (mêmes arguments que pour la question précédente).

   D'où $P(X_3 = 0) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

   De la même façon, on démontre que $P(X_3 = 3) = \frac{1}{4}$.

   (b) La famille $(X_2 = 0)$, $(X_2 = 1)$ et $(X_2 = 2)$, forme un système complet d'évènements car ces évènements sont incompatibles et que leur réunion est l'univers (0,1,2 sont les seuls valeurs possibles pour X_2).

   D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

   $P(X_3 = 1) = P(X_2 = 0) \times P_{X_2=0}(X_3 = 1) + P(X_2 = 1) \times P_{X_2=1}(X_3 = 1) + P(X_2 = 2) \times P_{X_2=2}(X - 3 = 1)$

   Donc $P(X_3 = 1) = \frac{1}{3}(P_{X_2=0}(X_3 = 1) + P_{X_2=1}(X - 3 = 1) + P_{X_2=2}(X_3 = 1))$.

   Or $P_{X_2=0}(X_3 = 1)$ est la probabilité de tirer une boule blanche exactement sachant que les deux premiers tirages ont donné une boule rouge.

   Donc $P_{X_2=0}(X_3 = 1) = \frac{1}{4}$ (A l'issue des deux premiers tirages, l'urne contient trois boules rouges et une blanche, que l'on tire au troisième tirage)

   $P_{X_2=1}(X_3 = 1)$ est la probabilité de tirer au total une boule blanche sachant que les deux premiers tirages ont donné une boule blanche. C'est donc la probabilité de tirer une boule rouge au troisième tirge, sachant que l'urne contient deux boules blanches et deux rouges donc, comme on a équiprobabilité sur l'ensemble des boules contenues dans l'urne à chaque tirage, $P_{X_2=1}(X_3 = 1) = \frac{2}{4}$

   $P_{X_2=2}(X_3 = 1) = 0$ car on ne peut avoir tirer au total une seule boule blanche sachant que les deux premiers tirages ont donné chacun une boule blanche.

   D'où $P(X_3 = 1) = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{4} + \frac{2}{4}) = \frac{1}{4}$.

   Enfin $P(X_3 = 2) = 1 - (P(X_3 = 0) + P(X_3 = 1) + P(X_3 = 3)) = \frac{1}{4}$.

   X_3 suit donc une loi uniforme sur 0,1,2,3.

3. Loi de X_n lorsque $n \geqslant 2$.

   (a) $X_n(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X_n. On effectue n tirages d'une boule dans une urne contenant toujours au moins une boule blanche et une boule rouge donc X_n peut prendre toutes les entiers de 0 à n.

   $P(X_n = 0) = P(\bar{B_1} \cap \bar{B_2} \cap ... \cap \bar{B_n})$ (probabilité de ne tirer que des boules rouges) ;

   $P(X_n = 0) = P(\bar{B_1}) \times P_{\bar{B_1}}(\bar{B_2}) \times ... \times P_{\bar{B_1} \cap ... \cap \bar{B_{n-1}}}(\bar{B_n})$ d'après la formule des probabilités totales.

   $P(X_n = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times ... \times \frac{n}{n+1} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

   (b) les évènements $(X_{n-1} = 0), ..., (X_{n-1} = n-1)$ forment un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales,

   $$P(X_n = k) = P[(X_n = k) \cap (X_{n-1} = 0)] + P[(X_n = k) \cap (X_{n-1} = 1)] + ... + P[(X_n = k) \cap (X_{n-1} = n-1)]$$

   Or on ne peut avoir, à l'issue des n tirages, k boules blanches que si les $n - 1$ premiers tirages nous ont donné au moins k-1 boules blanches et au plus k. Les évènements $(X_n = k)$ et $(X_{n-1} = i)$ avec i différents de k et $k - 1$ sot donc incompatibles.

   Il ne nous reste donc dans la somme que les deux termes d'indices k et $k - 1$.

(c) $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k)$ est la probabilité d'avoir abtenu k boules blanches à l'issue des n tirages sachant que les $n-1$ premiers tirages ont donné $k-1$ boules blanches. Cela signifie que la boule tirée au dernier tirage est forcément blanche, sachant que l'urne dans laquelle on tire contient k boules blanches et $n-(k-1)$ rouges.

Donc $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) = \dfrac{k}{n+1}$

$P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$ représente la probabilité de tirer une boule rouge dans une urne contenant k+1 boules blanches sur $n+1$ boules au total.

Donc $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k) = \dfrac{n-k}{n+1}$.

(d) Soit P_n la proposition ": $\forall k \in [[1, n]], \quad P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$."

Initialisation : Pour $n = 2$, P_n est vraie (question 2).

Hérédité : on suppose que P_n est vraie pour un certain entier n fixé supérieur ou égal à 2. Montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après la question 3 (b) appliquée à $n+1$, pour tout k compris entre 1 et $n+1$,

$P(X_{n+1} = k) = P((X_{n+1} = k) \cap (X_n = k)) + P((X_{n+1} = k) \cap (X_n = k-1))$

$P(X_{n+1} = k) = P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) \times P(X_n = k) + P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k)P(X_n = k-1)$ d'après la formule des probabilités composées.

Or d'après la question 3c) appliquée à $n+1$, $P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) = \dfrac{k}{n+2}$ et $P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = \dfrac{n+1-k}{n+2}$.

De plus par hypothèse de récurrence, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1} = P(X_n = k-1)$.

Donc $P(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{k}{n+2} + \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1-k}{n+2}$.

$P(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{n+1} \times (\dfrac{k}{n+2} + \dfrac{n-1-k}{n+2}) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$.

Donc P_{n+1} est vraie.

Par récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

(e) X_n suit donc la loi uniforme sur $[|0; n|]$ donc son espérance vaut $\dfrac{n}{2}$ et sa variance $\dfrac{n(n-1)}{6}$ (à démontrer avec les formules donnant la somme des n premiers entiers et la somme des carrées de n premiers entiers).

Exercice 10

1. X_N peut prendre toutes les valeurs entières de 0 à N-1 car le nombre maximal de chgts est obtenu lorsque le résultat est PFPFP...ou FPFP..., le premier chagement intervenant au deuxième lancer donc N-1 chgts au total. Il peut n'y avoir aucun chgt également si l'on obtient que des piles ou des faces.

2. X_2 ne prend que les valeurs 0 et 1.
On note F_i l'évènement "on obtient face au ième lancer".
Alors $P(X_2 = 0) = P((F_1 \cap F_2) \cup (\bar{F_1} \cap \bar{F_2}))$
$P(X_2 = 0) = P(F_1 \cap F_2) + P(\bar{F_1} \cap \bar{F_2})$ car les deux evts sont incompatibles.
$P(X_2 = 0) = P(F_1) \times P(F_2) + P(\bar{F_1}) \times P(\bar{F_2})$ car les lancers sont indépendants.
$P(X_2 = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ car la pièce est bien équilibrée.
De plus $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$.
X_2 suit donc la loi de bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

X_3 peut prendre les valeurs 0,1 et 2.
$P(X_3 = 0) = P((F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (\bar{F_1} \cap \bar{F_2} \cap \bar{F_3}))$
... (à faire)
$P(X_3 = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$.
$P(X_3 = 2) = P((F_1 \cap \bar{F_2} \cap F_3) \cup (\bar{F_1} \cap F_2 \cap \bar{F_3}))$
... (à faire)
$P(X_3 = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$.
$P(X_3 = 1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$.

3. $P(X_N = 0) = P((F_1 \cap F_2 ... \cap F_N) \cup (\bar{F_1} \cap \bar{F_2} ... \cap \bar{F_N}))$
$P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^N + \left(\frac{1}{2}\right)^N$ car les lancers sont idéntiques et indépendants et que la pièce est bien équilibrée.
$P(X_N = 0) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^N = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$
Pour calculer $P(X_N = 1)$, on fait un arbre de choix :
on commence par choisir la place de l'unique changement : N-1 possibilités.
Ensuite, on choisit le résultat du premier lancer : deux choix.
Tous les autres lancers sont alors déterminés entièrement par ces deux donnés.
Comme la pièce est bien équilibrée et les lancers indépendants, on est dans une situation d'équiprobabilité, l'univers étant l'ensemble des N listes de l'ensemble Pile, Face, dont le cardinale est 2^N.
Donc $P(X_N = 1) = \frac{2(N-1)}{2^N} = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N$.

4. (a) Pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$, $P_{X_N=k}(X_{N+1} = k)$ représente la probabilité qu'il n'y ait pas de chagement entre le N ième et le (N+1)ième lancer donc la probabilité que le (N+1)ième lancer donne le même résultat que ce qui précéde, soit $\frac{1}{2}$.
   (b) Pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$, $P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = P_{X_N=k}(X_{N+1} - X_N = 0) * P(X_N = k)$, d'après la formule des probas composées.
   $P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = P_{X_N=k}(X_{N+1} = X_N) * P(X_N = k)$
   $P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = P_{X_N=k}(X_{N+1} = k) * P(X_N = k) = \frac{1}{2}P(X_N = k)$.
   (c) Les évènements $(X_N = k)$ pour k variant de 0 à N-1 forment un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales,
   $P(X_{N+1} - X_N = 0) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap (X_N = k))$

$P(X_{N+1} - X_N = 0) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} P(X_N = k)$ d'après la question précédente.

$P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} P(X_N = k) = \frac{1}{2}$ car Les évènements $(X_N = k)$ forment une partition de l'univers.

(d) $(X_{N+1} - X_N)(\Omega) = \{0, 1\}$ car entre ne Nième et le (N+1)ième lancer, il peut y avoir au plus un changement.

Comme $P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}$, on en déduit que $P(X_{N+1} - X_N = 1) = \frac{1}{2}$ donc $X_{N+1} - X_N$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Donc $E(X_{N+1} - X_N) = \frac{1}{2}$. Par linéarité de l'espérance, $E(X_{N+1}) - E(X_N) = \frac{1}{2}$, d'où le résultat.

On pose $u_N = E(X_N)$.

On remarque d'après la relation précédente que la suite u est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

Donc $u_N = u_2 + \frac{1}{2} \times (N - 2)$. Donc $E(X_N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(N - 2) = \frac{1}{2}(N - 1)$.

Exercice 11 (EMLyon 2002)

1. **Étude préliminaire**

(a) Comme on sait que la série converge, on travaille directement la somme pour tout réel x de $[0,1[$:

$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$s_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(b) Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $k<n$, on a $k+1\leq n$ donc les coefficients s'écrivent sous forme factorielle :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{(k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-k)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k+k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

(c) On démontrePour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0,1[$, déduire de la question précédente :

$$x s_k(x) + x s_{k+1}(x) = x \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n.$$

On calcule les sommes partielles :

$$\begin{aligned}
x\sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{M} \binom{n}{k+1} x^n &= \sum_{n=k+1}^{M} \binom{n}{k} x^{n+1} + \sum_{n=k+1}^{M} \binom{n}{k+1} x^{n+1} + \binom{k}{k} x^{k+1} \text{ en isolant les} \\
&= \sum_{n=k+1}^{M} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) x^{n+1} + x^{k+1} \\
&= \sum_{n=k+1}^{M} \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} + x^{k+1} \\
&= \sum_{m=k+2}^{M+1} \binom{m}{k+1} x^m + \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} \\
&= \sum_{m=k+1}^{M+1} \binom{m}{k+1} x^m \\
&\to \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n = s_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

et donc $s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$

(d) Soit $x \in [0,1[$. On fait apparaître la relation de récurrence qui permettra de déterminer s_{k+1} à partir de s_k :

$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$ donc $s_{k+1}(x)\,(1-x) = x s_k(x)$ et $s_{k+1}(x) = s_k(x)\,\dfrac{x}{1-x}$

– pour $k=0$ on a $s_0(x) = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{x^0}{(1-x)0+1}$

– Soit $k \geq 0$ tel que $s_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ alors

$$\begin{aligned} s_{k+1}(x) &= s_k(x)\frac{x}{1-x} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \cdot \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+1+1}} \end{aligned}$$

– Donc pour tout entier $k =$: $s_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

2. **Étude d'une expérience aléatoire**

(a) Si on continue le tirage des boules après la noire, le rang de la première reste le même. Donc la loi de N est celle de la **première** boule noire obtenue dans une suite de tirages **indépendants** ayant tous la **même probabilité** 1/5 de donner une boule noire.
Donc $\mathrm{N} \hookrightarrow \mathcal{G}(1/5)$ et $\mathrm{E}(\mathrm{N}) = \frac{1}{1/5} = 5$

(b) Quand $\mathrm{N} = n$, on effectue n tirages indépendants dans l'urne. Donc le nombre X de boules noitres obtenues suit une loi binômiale de paramètres n et 1/5. Donc pour $k \in [[0,n]]$: $p(\mathrm{X} = k/\mathrm{N} = n) = \mathrm{C}_n^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$. et 0 si $k > n$

(c) Comme la probabilité **dépend de** la valeur de n, on utilise la formule des probabilités totales en conditionnant avec comme système ccomplet d'événements $(\mathrm{N} = n)_{n\in[[1,+\infty[[}$
La série est convergente et

$$p(\mathrm{X}=0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{p(\mathrm{X}=0/\mathrm{N}=n)}_{\text{avec } 0\leq n} p(\mathrm{N}=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \frac{1}{5}$$

on regroupe les puissances pour n'avoir qu'une puissance n et on factorise les constantes :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{X}=0) &= \frac{1}{5}\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n} - \left(\frac{4}{9}\right)^0\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{16}{25}} - 1\right) = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

car $|16/25| < 1$

(d) $(\mathrm{N} = n)_{n\in[[1,+\infty[[}$ est là encoire un système complet d'événements. Mais dans la formule des probabiltiés totales, seules les termes pourlesquels $n \geq k$ seront non nuls

$$p(\mathrm{X}=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(\mathrm{X}=k/\mathrm{N}=n)\, p(\mathrm{N}=n)$$

On calcule la somme partielles (le découpage de la somme peut se faire si $k \geq 1$) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\mathrm{M}} p(\mathrm{X}=k/\mathrm{N}=n)\, p(\mathrm{N}=n) &= \sum_{n=1}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^{\mathrm{M}} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{1}{5} \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^{-k-1} \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^{\mathrm{M}} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^{\mathrm{M}} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{16}{25}\right)^n \\ &\underset{\mathrm{M}\to+\infty}{\to} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(1-\left(\frac{16}{25}\right)\right)^{k+1}} = \frac{1}{4^k}\frac{16^k}{9^k}\frac{25}{9}\frac{1}{4} \\ p(\mathrm{X}=k) &= \left(\frac{4}{9}\right)^k \frac{25}{36} \end{aligned}$$

(e) On étudie l'absoue convergence de la série $\sum_{k\geq 0} k \cdot p\left(\mathrm{X}=k\right)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\mathrm{M}} \left|k \cdot p\left(\mathrm{X}=k\right)\right| &= \sum_{k=1}^{\mathrm{M}} k \cdot p\left(\mathrm{X}=k\right) + 0 \\
&= \sum_{k=1}^{\mathrm{M}} k \left(\frac{4}{9}\right)^k \frac{25}{36} = \frac{25}{36}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{M}} k \left(\frac{4}{9}\right)^k - 0\right) \\
&\to \frac{25}{36} \frac{\frac{4}{9}}{\left(1-\frac{4}{9}\right)^2} = 1
\end{aligned}$$

la série converge car $|4/9| < 1$. Et la somme de la série sans valeuir absolue est 1

(f) On a pour $k \geq 1$ (pour pouvoir mettre à part le terme pour $k=0$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \leqslant k\right) &= \sum_{i=0}^{k} p\left(\mathrm{X}=i\right) = \frac{4}{9} + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{4}{9}\right)^i \frac{25}{36} = \frac{4}{9} + \frac{25}{36}\left(\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{4}{9}\right)^i - 1\right) \\
&= \frac{4}{9} + \frac{25}{36}\left(\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - 1}{\frac{4}{9} - 1} - 1\right) = \frac{4}{9} + \frac{25}{36}\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - 1 + \frac{5}{9}}{-\frac{5}{9}} \\
&= \frac{4}{9} - \frac{5}{4}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - \frac{4}{9}\right) = 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^k
\end{aligned}$$

et égalmement pour $k=0$ où $p\left(\mathrm{X} \leq 0\right) = p\left(\mathrm{X}=0\right) = 4/9$

Exercice 12

1. (a) On a

$$\mathrm{J}_0=\mathcal{A}_0,\quad \mathrm{J}_1=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1,\quad \mathrm{J}_2=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2,\quad \mathrm{J}_3=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2\cap\mathcal{A}_3\quad \mathrm{J}_4=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2\cap\mathcal{A}_3\cap\mathcal{A}_4$$

ce qui nous fournit directement les probabilités attendues
Calcul de $p(\mathrm{J}_0)$: $p(\mathrm{J}_0)=p(\mathcal{A}_0)=1$
Calcul de $p(\mathrm{J}_1)$: $p(\mathrm{J}_1)=p(\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1)=p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{A}_1)=1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$ d'après la formule des probas ciomposées.
Calcul de $p(\mathrm{J}_2)$: $p(\mathrm{J}_2)=p(\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2)=p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{A}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_2)=1\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=(\dfrac{2}{3})^2$
Calcul de $p(\mathrm{J}_3)$:

$$p(\mathrm{J}_3)=p(\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2\cap\mathcal{A}_3)=p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{A}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_2)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2}(\mathcal{A}_3)=1\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=(\frac{2}{3})^3$$

$p(\mathrm{J}_0)=1$	$p(\mathrm{J}_1)=\dfrac{2}{3}$	$p(\mathrm{J}_2)=(\dfrac{2}{3})^2$	$p(\mathrm{J}_3)=(\dfrac{2}{3})^3$

Justification des calculs de probabilités :
Si le jeton A se trouve dans la cas C_0 après un certain nombre d'opérations et qu'il doit y être encore à l'issue de l'opération suivante, cela signifie que l'on doit pioche le jeton b ou c. La probabilité de piocher le jeton b ou c étant $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$, (univers munie de la loi uniforme) chaque probabilité conditionnelle est égale à $\dfrac{2}{3}$

(b)

$$p(\mathrm{J}_n)=p(\mathcal{A}_0\cap\underbrace{\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2\cap\cdots\cap\mathcal{A}_{n-1}\cap\mathcal{A}_n}_{n\text{ évènements}})=p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{A}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_2)\cdots p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2\cap\cdots\cap\mathcal{A}_{n-1}}(\mathcal{A}_n)=(\frac{2}{3})^n$$

$$\boxed{\forall n\geqslant 0,\quad p(\mathrm{J}_n)=(\frac{2}{3})^n}$$

2. (a) $\mathrm{D}_2=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_2,\quad \mathrm{D}_3=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\mathcal{A}_3$ et $\mathrm{D}_4=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_4$
L'évènement D_1 est impossible (pour revenir pour la première fois en C_0, il faut avoir quitter C_0 puis revenir à C_0, ce qui implique au moins deux opérations) donc $p(\mathrm{D}_1)=0$
Calcul de $p(\mathrm{D}_2)$:

$$p(\mathrm{D}_2)=p(\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{A}_2)=p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_2)=1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=(\frac{1}{3})^2$$

Justification des calculs de probabilités :
$p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)$: le jeton A se trouve dans la cas C_0 et il doit aller dans la case C_1. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton a. La probabilité de piocher le jeton a étant $\dfrac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)=\dfrac{1}{3}$
$p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_2)$: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $1^{ière}$ opération et il doit aller dans la case C_0. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton a. La probabilité de piocher le jeton a étant $\dfrac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{A}_2)=\dfrac{1}{3}$
Calcul de $p(\mathrm{D}_3)$:

$$\begin{aligned}p(\mathrm{D}_3)&=p(\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\mathcal{A}_3)=p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{A}_3)\\&=1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :
$p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $1^{ière}$ opération et il doit rester dans

la case C_1. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A ne change pas de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton b ou c. La probabilité de piocher le jeton b ou c étant $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)=\frac{2}{3}$

$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{A}_3)}$: le jeton A se trouve dans la cas C_1 et il doit aller dans la case C_0.Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton a. La probabilité de piocher le jeton a étant $\frac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{A}_3)=\frac{1}{3}$

Calcul de $p(D_4)$:

$$\begin{aligned} p(D_4) &= p(\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\mathcal{B}_3\cap\mathcal{A}_4)=p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\mathcal{B}_3}(\mathcal{A}_4)\\ &= 1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=(\frac{1}{3})^2\times(\frac{2}{3})^2 \end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :

$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3)}$: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $2^{ième}$ opération et il doit rester dans la case C_1. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A ne change pas de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton $b$ou c. La probabilité de piocher le jeton b ou $c$étant $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3)=\frac{2}{3}$

$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\mathcal{B}_3}(\mathcal{A}_4)}$: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $3^{ième}$ opération et il doit aller dans la case C_0. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton a. La probabilité de piocher le jeton a étant $\frac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\mathcal{B}_3}(\mathcal{A}_4)=\frac{1}{3}$

$p(D_1)=0$	$p(D_2)=(\frac{1}{3})^2$	$p(D_3)=(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})$	$p(D_4)=(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2$

(b) Si $n\geqslant 2$, on a : $D_n=\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-1}\cap\mathcal{A}_n$

Calcul de $p(D_n)$ **lorsque** $n\geqslant 2$:

$$\begin{aligned} p(D_n) &= p(\mathcal{A}_0\cap\underbrace{\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-2}\cap\mathcal{B}_{n-1}}_{n-1 \text{ évènements}}\cap\mathcal{A}_n)\\ &= p(\mathcal{A}_0)p_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{B}_1)p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)\cdots p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-2}}(\mathcal{B}_{n-1})p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-1}}(\mathcal{A}_n)\\ &= 1\times\frac{1}{3}\times\underbrace{\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{2}{3}}_{n-2 \text{ évènements}}\times\frac{1}{3}=(\frac{2}{3})^{n-2}\times(\frac{1}{3})^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\geqslant 2,\quad p(D_n)=(\frac{2}{3})^{n-2}\times(\frac{1}{3})^2}$$

Justification des calculs de probabilités :

$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_k}(\mathcal{B}_{k+1})}$: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $k^{ième}$ opération et il doit rester dans la case C_1.Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A ne change pas de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton $b$ou c. La probabilité de piocher le jeton b ou c étant $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_k}(\mathcal{B}_{k+1})=\frac{2}{3}$

$\underline{p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-1}}(\mathcal{A}_n)}$: le jeton A se trouve dans la cas C_1 à l'issue de la $(n-1)^{ième}$opération et il doit aller dans la case C_0. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de place, c'est-à-dire que l'on pioche le jeton a. La probabilité de piocher le jeton a étant $\frac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_0\cap\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2\cap\cdots\cap\mathcal{B}_{n-1}}(\mathcal{A}_n)=\frac{1}{3}$

3. (a) La position du jeton A à l'issue de le $(n+1)^{ième}$ opération dépend de la lettre obtenue (a, b ou c) mais aussi de sa position à l'issue de la $n^{ième}$ opération. Etant donné que la position à l'issue de la $n^{ième}$

opération précède l'obtention de la lettre, on introduit la famille $(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n)$ qui constitue un système complet d'évènements. On a donc :

$$\begin{cases} p(\mathcal{A}_{n+1}) = p(\mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_{n+1}) + p(\mathcal{B}_n \cap \mathcal{A}_{n+1}) = p(\mathcal{A}_n)p_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{A}_{n+1}) + p(\mathcal{B}_n)p_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{A}_{n+1}) = \dfrac{2}{3}p(\mathcal{A}_n) + \dfrac{1}{3}p(\mathcal{B}_n) \\ p(\mathcal{B}_{n+1}) = p(\mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}_{n+1}) + p(\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_{n+1}) = p(\mathcal{A}_n)p_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{B}_{n+1}) + p(\mathcal{B}_n)p_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}p(\mathcal{A}_n) + \dfrac{2}{3}p(\mathcal{B}_n) \end{cases}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} p(\mathcal{A}_{n+1}) = \dfrac{2}{3}p(\mathcal{A}_n) + \dfrac{1}{3}p(\mathcal{B}_n) \\ p(\mathcal{B}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}p(\mathcal{A}_n) + \dfrac{2}{3}p(\mathcal{B}_n) \end{cases}}$$

Justification des calculs de probabilités conditionnelles :
$\underline{p_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{A}_{n+1})}$: le jeton A est dans la cas C_0 et il doit se trouver à l'issue de l'opération suivante dans la case C_0. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A ne change pas de case, c'est-à-dire si l'on obtient les lettres b ou c. Puisque la probabilité d'obtenir les lettres b ou c est $\dfrac{2}{3}$,on a $p_{\mathcal{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$
$\underline{p_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{A}_{n+1})}$: le jeton A est dans la cas C_1 et il doit se trouver à l'issue de l'opération suivante dans la case C_0. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de case, c'est-à-dire si l'on obtient la lettre a. Puisque la probabilité d'obtenir la lettre a est $\dfrac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$
$\underline{p_{\mathcal{A}_n}(\mathcal{B}_{n+1})}$: le jeton A est dans la cas C_0 et il doit se trouver à l'issue de l'opération suivante dans la case C_1. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A change de case, c'est-à-dire si l'on obtient la lettre a. Puisque la probabilité d'obtenir la lettre a est $\dfrac{1}{3}$, on a $p_{\mathcal{A}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$
$\underline{p_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_{n+1})}$: le jeton A est dans la cas C_1 et il doit se trouver à l'issue de l'opération suivante dans la case C_1. Cet évènement se réalise si et seulement si le jeton A ne change pas de case, c'est-à-dire si l'on obtient les lettres b ou c.Puisque la probabilité d'obtenir les lettres b ou c est $\dfrac{2}{3}$, on a $p_{\mathcal{B}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$

(b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit la proposition suivante :

$$(\mathcal{P}_n) : \quad p(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n} \quad \text{et} \quad p(\mathcal{B}_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$$

Initialisation : Puisque le jeton A est au départ dans la case C_0, on a : $p(\mathcal{A}_0) = 1$ et $p(\mathcal{B}_0) = 0$. D'autre part, on a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

donc on a bien $p(\mathcal{A}_0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2 \times 3^0}$ et $p(\mathcal{B}_0) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2 \times 3^0}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie pour un certain entier n fixé et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que

$$p(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n} \quad \text{et} \quad p(\mathcal{B}_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$$

et montrons que

$$p(\mathcal{A}_{n+1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} \quad \text{et} \quad p(\mathcal{B}_{n+1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n+1}}$$

Pour commencer, on a $\begin{cases} p(\mathcal{A}_{n+1}) = \dfrac{2}{3}p(\mathcal{A}_n) + \dfrac{1}{3}p(\mathcal{B}_n) \\ p(\mathcal{B}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}p(\mathcal{A}_n) + \dfrac{2}{3}p(\mathcal{B}_n) \end{cases}$ et parhypothèse de récurrence, on a alors :

$$\begin{cases} p(\mathcal{A}_{n+1}) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2 \times 3^n}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2 \times 3^n}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3^{n+1}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2 \times 3^{n+1}} \\ p(\mathcal{B}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2 \times 3^n}\right) + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2 \times 3^n}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2 \times 3^{n+1}} - \dfrac{1}{3^{n+1}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2 \times 3^{n+1}} \end{cases}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
Conclusion : par récurrence, $\forall n \geqslant 0, \quad (\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad p(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^n} \quad \text{et} \quad p(\mathcal{B}_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}}$$

Exercice 13
On commence par traduire l'énoncé. Pour cela, on introduit naturellement les évènements

I : " être un contrevenant involontaire " et V : " être verbalisé "

On a donc : $p(\mathrm{I}) = \dfrac{1}{4}$, $p(\overline{\mathrm{I}}) = \dfrac{3}{4}$, $p_{\mathrm{I}}(\mathrm{V}) = \dfrac{1}{40}$ et $p_{\overline{\mathrm{I}}}(\mathrm{V}) = \dfrac{1}{60}$

1. Il s'agit donc de calculer la probabilité $p(\mathrm{V})$. On utilise pour cela le système complet d'évènements $(\mathrm{I}, \overline{\mathrm{I}})$ et l'on a

$$p(\mathrm{V}) = p(\mathrm{I} \cap \mathrm{V}) + p(\overline{\mathrm{I}} \cap \mathrm{V}) = p(\mathrm{I})p_{\mathrm{I}}(\mathrm{V}) + p(\overline{\mathrm{I}})p_{\overline{\mathrm{I}}}(\mathrm{V}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{40} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{60} = \frac{3}{160} \simeq 0.019 \,\mathrm{div}\ 10^{-3}$$

$$\boxed{\text{Il y a environ 1,9 \% de chance qu'un stationnement irrégulier soit sanctionné}}$$

2. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $p_{\mathrm{V}}(\overline{\mathrm{I}})$. Ne povant réinterpréter cette probabilité conditionnelle, on utilise la formule mathématique définissant cette probabilité conditionnelle, ce qui nous donne :

$$p_{\mathrm{V}}(\overline{\mathrm{I}}) = \frac{p(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{I}})}{p(\mathrm{V})} = \frac{p(\overline{\mathrm{I}} \cap \mathrm{V})}{\mathrm{P}(\mathrm{V})} = \frac{p(\overline{\mathrm{I}})p_{\overline{\mathrm{I}}}(\mathrm{V})}{p(\mathrm{V})} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{60}}{\frac{3}{160}} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\text{On a 2 chances sur 3 d'être un contrevenant volontaire lorsqu'on est verbabilisé}}$$

3. Pour $k \in [\![0, 300]\!]$, on note A_k l'évènement :

A_k : " être verbalisé k fois verbalisés au cours de 300 stationnements irréguliers "

Au cours de ses activités professionnelles, un certain contrevenant volontaire se trouve 300 fois dans l'année en stationnement irréguliers et a donc, chaque fois, une probabilité de $\dfrac{1}{60}$ d'être verbalisé.
Quelle est la probabilité qu'il soit verbalisé :

(a) Il s'agit de calculer $p(\mathrm{A}_0)$. A chaque stationnement, la probabilité de ne pas être verbalisé vaut $1 - \dfrac{1}{60}$, on a :

$$p(\mathrm{A}_0) = \left(1 - \frac{1}{60}\right)^{300} \simeq 0.006 \pm 10^{-3}$$

$$\boxed{\text{On a environ 0,6 \% de chance de ne pas être verbalisé en 300 stationnements irréguliers}}$$

(b) Il s'agit de calculer $p(\mathrm{A}_1)$. A chaque stationnement, la probabilité d'être verbalisé vaut $\dfrac{1}{60}$, on choisit l'un des 300 stationnements irréguliers où l'on a va être verbalisé ($\binom{360}{1}$ choix), la probabilité d'être verbalisé pour ce stationnement irrégulier vaut $\dfrac{1}{60}$ et la probabilité de ne pas être verbalisé pendant les $300 - 1 = 299$ autres stationnements vaut $(1 - \dfrac{1}{60})^{299}$, donc on a :

$$p(\mathrm{A}_1) = \binom{360}{1} \left(\frac{1}{60}\right) \left(1 - \frac{1}{60}\right)^{299} \simeq 0.040 \pm 10^{-3}$$

$$\boxed{\text{On a environ 4 \% de chance d'être verbalisé une seule fois en 300 stationnements irréguliers}}$$

(c) Il s'agit de calculer $p(\mathrm{A}_{10})$. A chaque stationnement, la probabilité d'être verbalisé vaut $\dfrac{1}{60}$, on choisit 10 des 300 stationnements irréguliers où l'on a va être verbalisé ($\binom{360}{10}$ choix), la probabilité d'être verbalisé pour ces 10 stationnements irréguliers vaut $(\dfrac{1}{60})^{10}$ et la probabilité de ne pas être verbalisé pendant les $300 - 10 = 290$ autres stationnements vaut $(1 - \dfrac{1}{60})^{290}$, donc on a :

$$p(\mathrm{A}_1) = \binom{360}{10} \left(\frac{1}{60}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{60}\right)^{290} \simeq 0.112 \pm 10^{-3}$$

$$\boxed{\text{On a environ 11,2 \% de chance d'être verbalisé 10 fois en 300 stationnements irréguliers}}$$

(d) Il s'agit de calculer $p(\mathrm{A}_k)$. A chaque stationnement, la probabilité d'être verbalisé vaut $\frac{1}{60}$, on choisit k des 300 stationnements irréguliers où l'on a va être verbalisé ($\binom{360}{k}$ choix), la probabilité d'être verbalisé pour ces k stationnements irréguliers vaut $(\frac{1}{60})^k$ et la probabilité de ne pas être verbalisé pendant les $300-k$ autres stationnements vaut $(1-\frac{1}{60})^{300-k}$, donc on a :

$$\forall k \in [\![0,300]\!], \quad p(\mathrm{A}_k) = \binom{360}{k}\left(\frac{1}{60}\right)^k\left(1-\frac{1}{60}\right)^{300-k}$$

La probabilité d'être verbalisé k fois en 300 stationnements irréguliers vaut $\binom{360}{k}\left(\frac{1}{60}\right)^k\left(1-\frac{1}{60}\right)^{300-k}$

Exercice 14 (Edhec 2004)

1. (a) Calculons la limite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Puisque $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ (car $\lim_{\mathrm{X}\to -\infty} e^{\mathrm{X}} = 0$) et comme $\lim_{x\to 0^+} x = 0$, il est immédiat que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc la fonction f est continue en 0.

   (b) On étudie pour cela le taux d'accroissement en 0

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \exp\left(-\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\rightarrow} 0,$$

   ce qui entraine que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

2. (a) La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ l'est également. En outre, la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, ce qui entraine que la fonction $f : x \mapsto x \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 1\times\exp\left(-\frac{1}{x}\right)+x\times\left(-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\left[1+\frac{1}{x}\right]$$

   Il est alors immédiat que $f'(x) > 0$ lorsque $x > 0$ (produit et somme de nombres strictement positifs)

   (b) Puisque $\lim_{x\to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to +\infty} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 1$ donc $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Exercice 15 (EMlyon 97)

(a) i. La fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (somme de deux réels strictement positifs), ce qui entraine que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1(1+e^x)-(1+x)e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = \frac{1+e^x-e^x-xe^x}{(1+e^x)^2} - \frac{(1+e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x-(1+2e^x+e^{2x})}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{-xe^x-2e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}(x+2+e^x) \end{aligned}$$

ii. On suit le conseil de l'énoncé

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x} - x = \frac{1+x-x(1+e^x)}{1+e^x} = \frac{1-xe^x}{1+e^x}$$

$\boxed{\text{En } -\infty}$: Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = -\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, le quotient ci-dessus tend vers 1 donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$, ce qui implique que la droite d'équation $y=1$ est asymptote en $-\infty$ à $\mathcal{C}_g$.

$\boxed{\text{En } +\infty}$: on factorise les termes dominants au numérateur et au dénominateur.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1-xe^x}{1+e^x} = \frac{-xe^x\left(-\dfrac{1}{xe^x}+1\right)}{e^x\left(e^{-x}+1\right)} = \frac{-xe^x}{e^x} \times \frac{-\dfrac{1}{xe^x}+1}{e^{-x}+1} = \underbrace{-x}_{\to-\infty}\underbrace{\left(\frac{-\dfrac{1}{xe^x}+1}{e^{-x}+1}\right)}_{\to 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ \frac{g(x)}{x} &= -\frac{-\dfrac{1}{xe^x}+1}{e^{-x}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1 \\ g(x)-(-x) &= g(x)+x = \frac{1+x}{1+e^x} - x + x = \frac{1+x}{1+e^x} = \frac{x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)}{e^x\left(e^{-x}+1\right)} = \frac{x}{e^x} \times \frac{\dfrac{1}{x}+1}{e^{-x}+1} \end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et que le quotient tend vers 1, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x)-(-x)] = 0$. Autrement dit, la droite d'équation $y=-x$ est asymptote en $+\infty$ à $\mathcal{C}_g$.

(b) L'équation (E) est équivalente à l'équation $g(x)=0$ avec x dans $\mathbb{R}_+$.
La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (même justification que la dérivabilité en remplaçant le terme "dérivable" par "continue"à et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (car $g'(x)<0$ sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question 1.a)) donc la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1]$ (car $g(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ d'après la question 1.b)).
Puisque $0 \in]-\infty,1]$, on en déduit que l'équation $g(x)=0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g sur $\mathbb{R}_+$).

(c) On compare les images $g(0)$, $g(x_0)$ et $g(1)$. On a :

$$g(0)=1, \quad g(x_0)=0, \ (x_0 \text{ est solution de l'équation } g(x)=0), \quad g(1) = \frac{1+1}{1+e} - 1 = \frac{2}{e} - 1 < 0 \quad (e>2)$$

De façon évidente, on a : $g(1) < g(x_0) < g(0)$ et puisque g est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $0 < x_0 < 1$.

Exercice 16 (EMLyon 2000)

I Premier protocole

(a) $(\mathrm{X}=k)$ signifie que le premier roi rouge apparaît au k^{ième} tirage. Celà arrive au plus tard au $2n-1^{ème}$ tirage car il ne reste alors que les deux rois rouges.
Donc que l'on n'en a pas eu avant (E)et qu'au $k^{ième}$ on en a un (R).
Donc $(\mathrm{X}=k)=\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2\cap\cdots\cap\mathrm{R}_k$ et

$$\begin{aligned} p(\mathrm{X}=k) &= p(\mathrm{E}_1)\cdot p(\mathrm{E}_2/\mathrm{E}_1)\dots p(\mathrm{E}_{k-1}/\mathrm{E}_1\cap\dots\mathrm{E}_{k-2})\,p(\mathrm{R}_k/\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2\cap\cdots\cap\mathrm{E}_{k-1}) \\ &= \frac{2n-2}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-1}\cdots\frac{2n-2-(k-2)}{2n-(k-2)}\cdot\frac{2}{2n-(k-1)} \end{aligned}$$

car, par exemple, quand on a tiré déjà $\mathrm{E}_1\cap\dots\mathrm{E}_{k-2}$ il reste $2n-2-(k-2)$ cartes qui ne sont pas des rois rouges parmi $2n-(k-2)$ cartes équiprobables.
Or $(2n-2)(2n-3)\dots(2n-k)=(2n-2)!/(2n-k-1)!$
et $(2n)(2n-1)\dots(2n-k+1)=(2n)!/(2n-k)!$ donc

$$p(\mathrm{X}=k)=\frac{2(2n-2)!\,(2n-k)!}{(2n-k-1)!\,(2n)!}=\frac{2n-k}{n(2n-1)}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=1}^{2n-1}kp(\mathrm{X}=k)=\sum_{k=1}^{2n-1}k\frac{2n-k}{n(2n-1)}=\frac{1}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{2n-1}k(2n-k) \\ &= \frac{1}{n(2n-1)}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}k2n-\sum_{k=1}^{2n-1}k^2\right)=\frac{1}{n(2n-1)}\left(2n\sum_{k=1}^{2n-1}k-\frac{(2n-1)(2n+1)(4p-2+1)}{6}\right) \\ &= \frac{1}{n(2n-1)}\left(2n\frac{(2n-1)(2n)}{2}-\frac{(2n-1)(2n)(4n-2+1)}{6}\right) \\ &= \frac{2n(2n-1)}{n(2n-1)}\left(n-\frac{4n-1}{6}\right)=2\left(\frac{6n}{6}-\frac{4n-1}{6}\right)=\frac{2n+1}{3} \end{aligned}$$

(c) On a $\mathrm{G}_1=a-\mathrm{X}$ et on a donc $\mathrm{E}(\mathrm{G}_1)=a-\mathrm{E}(\mathrm{X})=a-\dfrac{2n+1}{3}$

II Deuxième protocole

(a) Pour tout entier $k\in\{1,...,n\}$, $(\mathrm{G}_2=a-k)$ signifie que l'on a retourné un roi rouge au $k^{ième}$ tirage.
Donc $(\mathrm{G}_2=a-k)=(\mathrm{X}=k)$.
et $p(\mathrm{G}_2=a-k)=p(\mathrm{X}=k)=\dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$

(b) $(\mathrm{G}_2=-n)$ signifie que l'on a pas tiré de roi rouge jusqu'au $n^{ième}$ tirage.
Donc $(\mathrm{G}_2=-n)=\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2\cap\cdots\cap\mathrm{E}_n$ et

$$\begin{aligned} p(\mathrm{G}_2=n) &= p(\mathrm{E}_1)\cdot p(\mathrm{E}_2/\mathrm{E}_1)\dots(\mathrm{E}_n/\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2\cap\cdots\cap\mathrm{E}_{n-1}) \\ &= \frac{2n-2}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-1}\cdots\frac{2n-2-(n-1)}{2n-(n-1)} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n-2)!}\cdot\frac{n!}{(2n)!}=\frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}=\frac{n-1}{2(2n-1)} \end{aligned}$$

(c) Comme les valeurs de G_2 sont $\{a-k \,/\, k \in [[1,n]]\} \cup \{-n\}$ on a alors (courageusement)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{G}_2) &= \sum_{k=1}^{n} (a-k)\, p(\mathrm{G}_2 = a-k) + (-n)\, p(\mathrm{G}_2 = -n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a-k)\, \frac{2n-k}{n(2n-1)} - n\frac{n-1}{2(2n-1)} \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{n} (a-k)(2n-k) - n\frac{n-1}{2(2n-1)} \\
&= \frac{1}{2n(2n-1)} \left[2\sum_{k=1}^{n} (a-k)(2n-k) - n^2(n-1) \right] \\
&= \frac{1}{2n(2n-1)} \left[2\sum_{k=1}^{n} \left[2na - (2n+a)k + k^2\right] - n^2(n-1) \right] \\
&= \frac{1}{2n(2n-1)} \left[4na\sum_{k=1}^{n} 1 - 2(2n+a)\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - n^2(n-1) \right] \\
&= \frac{1}{2n(2n-1)} \left[4n^2a - 2(2n+a)\frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2(n-1) \right] \\
&= \frac{n}{2n(2n-1)} \left[4na - (2n+a)(n+1) + \frac{(n+1)(2n+1)}{3} - n(n-1) \right] \\
&= \frac{1}{2(2n-1)} \left[(3n-1)a - 2n(n+1) + \frac{2n^2+3n+1-3n^2+3n}{3} \right] \\
&= \frac{1}{6(2n-1)} \left[3(3n-1)a - 6n(n+1) - n^2 + 6n + 1 \right] \\
&= \frac{1}{6(2n-1)} \left[3(3n-1)a - 7n^2 + 1 \right] = \frac{3(3n-1)a - \left(7n^2-1\right)}{6(2n-1)}
\end{aligned}$$

III Comparaison des deux protocoles

On compare les gain moyens obtenus par les deux méthodes dans le cas où $n = 16$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{G}_2) - \mathrm{E}(\mathrm{G}_1) &= \frac{3(3n-1)a - \left(7n^2-1\right)}{6(2n-1)} - a + \frac{2n+1}{3} \\
&= \frac{3(47)a - (7\cdot 256 - 1)}{6(2n-1)} - a + \frac{2n+1}{3} \\
&= \frac{3(3n-1)a - \left(7n^2-1\right)}{6(2n-1)} - a + \frac{2n+1}{3} \\
&= \frac{\left[3(3n-1) - 6(2n-1)\right]a - \left(7n^2-1\right) + 2\left(4n^2-1\right)}{6(2n-1)} \\
&= \frac{3(-n+1)a + n^2 - 1}{6(2n-1)} \\
&= \frac{(n-1)(-3a+n+1)}{6(2n-1)}
\end{aligned}$$

donc si $a \leq (n+1)/3$ alors la différence est positive et il vaut mieux choisir la méthode 2, sinon, la méthode 1 est préférable.